

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio 1. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare A^{-1} .
2. Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
3. Posto $\widehat{\mathbf{b}} = [1 + \epsilon, 1 - \epsilon]^T$, risolvere il sistema lineare $A\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{b}}$.
4. Verificare che

$$\frac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

per $\|\cdot\| \in \{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty\}$.

5. Mostrare che

$$\|A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty = |\epsilon|.$$

Esercizio 2. Posto $a = -0.01$ e $b = 0.01$ si generi il vettore $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{100}] \in \mathbb{R}^{100}$ di punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$. Sia inoltre $\mathbf{f} = [f(x_1), \dots, f(x_{100})]$ e $\mathbf{g} = [g(x_1), \dots, g(x_{100})]$ con

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}, \quad g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Sia infine

$$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_{100}], \quad w_j = \frac{|f_j - g_j|}{|g_j|}, \quad 1 \leq j \leq 100.$$

Utilizzando la funzione `semilogy` si rappresenti in scala logaritmica il vettore \mathbf{w} e si commenti il risultato.