Metodi Diretti per la Risoluzione di Sistemi Lineari

Luca Gemignani
luca.gemignani@unipi.it

20 marzo 2018

Indice

Lezione 1: Sistemi Triangolari.

Sistemi lineari $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove la matrice dei coefficienti $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è densa di medie/piccole dimensioni ($n \leq 10^6$) sono generalmente risolti numericamente mediante metodi diretti che con una sequenza finita di trasformazioni elementari riducono il sistema in una forma equivalente facilmente risolubile. Particolare rilevanza in questo contesto assumono le tecniche per la riduzione in forma triangolare.

Definizione 1.1. Una matrice $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *triangolare superiore* se $t_{i,j} = 0$ per $i > j$. Una matrice $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *triangolare inferiore* se $t_{i,j} = 0$ per $i < j$.

Si osserva facilmente (si dimostri) che una matrice triangolare $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è invertibile se e soltanto se $t_{i,i} \neq 0$ per $1 \leq i \leq n$. Un sistema lineare triangolare $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore (inferiore) invertibile, si risolve con un metodo di *sostituzione all'indietro* (*sostituzione in avanti*) come segue. Dall'ultima equazione si ricava

$$t_{n,n}x_n = b_n \quad \rightarrow \quad x_n = b_n/t_{n,n}.$$

Assumiamo ora di aver determinato $x_{k+1}, \ldots, x_n$ e di voler determinare x_k, $1 \le k \le n-1$. Dalla $k-$esima equazione si ottiene

$$t_{k,k}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} t_{k,j}x_j = b_k \quad \to \quad x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^{n} t_{k,j}x_j)/t_{k,k}.$$

Il programma seguente implementa il metodo in MatLab.

```
function [x] = solve_tri(t,b)
% backward substitution
 n=length(b);
 x=zeros(n,1);
 x(n)=b(n)/t(n,n);
 for k=n-1:-1:1
     s=0;
     for j=k+1:n
         s=s+t(k,j)*x(j);
     end
     x(k)=(b(k)-s)/t(k,k);
 end
end
```

Il costo computazionale risulta di $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$ operazioni moltiplicative. L'approccio si estende immediatamente a matrici triangolari inferiori.

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è generale allora per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si può pensare di ridurre progressivamente A in forma triangolare mediante una sequenza di trasformazioni del tipo

$$A_0 = A, \quad A_k \to A_{k+1},\ 0 \le k \le n-2; \quad \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}_k \to \boldsymbol{b}_{k+1}, \ \ 0 \le k \le n-2,$$

dove $A_{n-1} = R$ è una matrice triangolare superiore ed i sistemi lineari $A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_k$, $0 \le k \le n-2$, sono *equivalenti*, i.e., hanno la stessa soluzione. In particolare la soluzione del sistema iniziale $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è così ricondotta alla soluzione del sistema finale $A_{n-1}\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{n-1}$ in forma triangolare.

Qualora la trasformazione $A_k \to A_{k+1}$ si possa esprimere nella forma $A_{k+1} = E_{k+1}A_k$ con E_{k+1} matrice triangolare inferiore invertibile allora si ottiene

$$R = A_{n-1} = E_{n-1}A_{n-2} = E_{n-1}E_{n-2}A_{n-3} = \ldots = E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_1A_0,$$

da cui ponendo $L = (E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{n-1}^{-1}$ segue la fattorizzazione

$$A = A_0 = L \cdot R.$$

Definizione 1.2. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *fattorizzabile* nella forma LU se esistono $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare superiore ed $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare inferiore con elementi uguali ad 1 sulla diagonale principale tali che $A = L \cdot U$.

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile è fattorizzata nella forma LU allora dal teorema di Binet segue che U è pure invertibile e dunque il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ può essere risolto mediante la sequenza di sistemi triangolari

$$\begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Seguendo la notazione Matlab indichiamo con $A(1\colon k, 1\colon k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $1 \leq k \leq n$, la sottomatrice di A formata dagli elementi situati nelle prime k righe e colonne.

Teorema 1.1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $A(1\colon k, 1\colon k)$ è invertibile per $k = 1, 2, \ldots, n-1$ allora esiste unica la fattorizzazione LU di A.

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sulla dimensione n della matrice. Per $n = 1$ $A = [a] = [1][a]$ è l'unica fattorizzazione LU di A. Supponiamo il teorema vero per matrici di ordine $m \leq n-1$ e dimostriamo per una matrice A di ordine n. La relazione $A = LU$ può essere riscritta come

$$\left[\begin{array}{c|c} A(1\colon n-1, 1\colon n-1) & \boldsymbol{z} \\ \hline \boldsymbol{v}^T & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L(1\colon n-1, 1\colon n-1) & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{w}^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U(1\colon n-1, 1\colon n-1) & \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{0}^T & \beta \end{array}\right]$$

dove la matrice A e le matrici incognite L ed U sono partizionate a blocchi con $A(1\colon n-1, 1\colon n-1), L(1\colon n-1, 1\colon n-1), U(1\colon n-1, 1\colon n-1) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Questa relazione è equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} A(1\colon n-1, 1\colon n-1) = L(1\colon n-1, 1\colon n-1)U(1\colon n-1, 1\colon n-1) \\ \boldsymbol{z} = L(1\colon n-1, 1\colon n-1)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{w}^T U(1\colon n-1, 1\colon n-1) \\ \alpha = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{y} + \beta \end{cases}$$

Per ipotesi del teorema le sottomatrici $A(1\colon 1, 1\colon 1), \ldots, A(1\colon n-2, 1\colon n-2)$ della matrice $A(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ sono invertibili per cui per l'ipotesi induttiva (teorema vero per matrici di ordine $n-1$) posso concludere l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di $A(1\colon n-1, 1\colon n-1)$. Siano pertanto $L(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ ed $U(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ i fattori triangolari di $A(1\colon n-1, 1\colon n-1)$. Per ipotesi del teorema $A(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ è invertibile e quindi $U(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ è invertibile e quindi i sistemi lineari che definiscono la seconda e terza equazione ammettono soluzione unica ($L(1\colon n-1, 1\colon n-1)$ è invertibile per definizione). Dati infine $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{y}$ l'ultima equazione permette di determinare univocamente il valore di β. $\square$

Nelle lezioni successive ci porremo il problema del calcolo della fattorizzazione LU e/o della riduzione in forma triangolare di una matrice.

Lezione 2: Matrici Elementari di Gauss ed il Metodo di Eliminazione Gaussiana.

Le matrici elementari di Gauss rappresentano i mattoni per la costruzione di processi di riduzione in forma triangolare e di fattorizzazione triangolare di una matrice.

Definizione 2.1. Una matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *elementare di Gauss* se esiste $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 = \ldots v_k = 0$ tale che

$$E = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$$

dove $\boldsymbol{e}_k$ indica il $k-$esimo vettore della base canoninca in $\mathbb{R}^n$.

Si osserva che valgono le seguenti proprietà.

1. Le matrici elementari di Gauss sono matrici triangolari inferiori invertibili con elementi uguali ad 1 sulla diagonale principale.
2. Se $E = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$ è una matrice elementare di Gauss allora $E^{-1} = I_n + \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$. Infatti vale
$$(I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T)(I_n + \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T) = I_n + \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_k^T\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_k^T = I_n.$$
3. Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \neq 0$. Allora esiste una matrice elementare di Gauss $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $E\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0]^T$. Infatti basterà porre $E = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$ con
$$x_j - v_j x_k = 0 \iff v_j = x_j/x_k, \quad k+1 \leq j \leq n.$$
4. Se $E = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$ e $\hat{E} = I_n - \boldsymbol{w}\boldsymbol{e}_\ell^T$ sono matrici elementari di Gauss con $\ell > k$ allora $\boldsymbol{e}_k^T\boldsymbol{w} = 0$ e dunque
$$E \cdot \hat{E} = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{w}\boldsymbol{e}_\ell.$$
Ciò implica che la matrice prodotto risulta costruita semplicemente apponendo nella corretta posizione i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ dei fattori.
5. Il prodotto $E\boldsymbol{y}$ di una matrice elementare di Gauss $E = I_n - \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_k^T$ per un vettore può essere calcolato con al più $n-k$ operazioni moltiplicative. Si ha infatti che $E\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ implica $z_j = y_j$ per $1 \leq j \leq k$ e $z_j = y_j - v_j y_k$ per $j > k$.

Il seguente processo detto *metodo di eliminazione gaussiana* utilizza queste proprietà per la riduzione sotto opportune ipotesi di una matrice $A = A_0$ in forma triangolare superiore. Indichiamo con $\boldsymbol{a}_1^{(k)}, \ldots \boldsymbol{a}_n^{(k)}$ i vettori colonna della matrice $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$, $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq k \leq n-1$. Se assumiamo che $a_{1,1}^{(0)} \neq 0$ allora per la proprietà (3) possiamo determinare E_1 tale da aversi

$$E_1\boldsymbol{a}_1^{(0)} = \left[a_{1,1}^{(0)}, 0, \ldots, 0\right]^T.$$

Risulta

$$E_1 = I_n - \left[0, a^{(0)}_{2,1}/a^{(0)}_{1,1}, \dots, a^{(0)}_{n,1}/a^{(0)}_{1,1}\right]^T \boldsymbol{e}_1^T.$$

I termini $m^{(0)}_{2,1} = a^{(0)}_{2,1}/a^{(0)}_{1,1}, \dots, m^{(0)}_{n,1} = a^{(0)}_{n,1}/a^{(0)}_{1,1}$ sono detti *moltiplicatori di Gauss* mentre il termine $a^{(0)}_{1,1}$ è detto *pivot* o *elemento pivotale*. Poniamo dunque

$$A_1 = E_1 A_0, \quad \boldsymbol{b}_1 = E_1 \boldsymbol{b}_0.$$

Il processo prosegue operando sulla matrice A_1. Se assumiamo che $a^{(1)}_{2,2} \neq 0$ allora per la proprietà (3) possiamo determinare E_2 tale da aversi

$$E_2 \boldsymbol{a}^{(1)}_2 = \left[a^{(1)}_{1,2}, a^{(1)}_{2,2}, 0, \dots, 0\right]^T.$$

Risulta

$$E_2 = I_n - \left[0, 0, a^{(1)}_{3,2}/a^{(1)}_{2,2}, \dots, a^{(1)}_{n,2}/a^{(0)}_{2,2}\right]^T \boldsymbol{e}_2^T.$$

Si osserva che $E_2 \boldsymbol{a}^{(1)}_1 = a^{(1)}_1$. Poniamo dunque

$$A_2 = E_2 A_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = E_2 \boldsymbol{b}_1.$$

In questo modo assumendo che valga

$$a^{(j-1)}_{j,j} \neq 0, \quad 1 \leq j \leq n-1, \tag{1}$$

è possibile determinare una sequenza di matrici elementari di Gauss $E_1, \dots E_{n-1}$ tali da aversi

$$E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 A_0 = E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 A = A_{n-1} = R,$$

con $R = A_{n-1}$ matrice triangolare superiore. Le relazioni $A_k = E_k A_{k-1}$, $\boldsymbol{b}_k = E_k \boldsymbol{b}_{k-1}$ espresse in termini di componenti si scrivono

$$\begin{cases} a^{(k)}_{i,j} = a^{(k-1)}_{i,j} \text{ se } i \leq k \text{ o } j \leq k-1; \\ a^{(k)}_{i,k} = 0 \text{ se } i > k; \\ a^{(k)}_{i,j} = a^{(k-1)}_{i,j} - m^{(k-1)}_{i,k} a^{(k-1)}_{k,j} \text{ se } i > k \text{ e } j > k; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} b^{(k)}_i = b^{(k-1)}_i \text{ se } i \leq k; \\ b^{(k)}_i = b^{(k-1)}_i - m^{(k-1)}_{i,k} b^{(k-1)}_k \text{ se } i > k. \end{cases} \tag{3}$$

La risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ viene dunque ricondotta alla risoluzione del sistema triangolare

$$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{n-1} = E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 \boldsymbol{b}.$$

Inoltre si ha che

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} R.$$

Dalla proprietà (2) segue che le inverse delle matrici elementari sono matrici elementari ottenute semplicemente cambiando il segno del vettore $\boldsymbol{v}$. Dalla proprietà (4) segue che il prodotto delle matrici elementari $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}$ è determinato apponendo nel corretto ordine i moltiplicatori di Gauss, i.e.,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} & 1 & & & \\ \frac{a_{3,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} & \frac{a_{3,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{a_{n,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} & \frac{a_{n,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} & \dots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Per (2) e (3) si ha che se applicabile il metodo di eliminazione gaussiana permette la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e il calcolo della fattorizzazione LU di A con $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n^3/3 + O(n^2)$ operazioni moltiplicative. Il seguente programma Matlab realizza il calcolo della fattorizzazione LU di A e la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

```
function [a,x] = gauss(a,b)
n=length(b);
m=zeros(n,1);
for k=1:n-1
    % calcolo dei moltiplicatori
    % che vengono sovrascritti in a
    for i=k+1:n
        m(i)=a(i,k)/a(k,k);
        a(i,k)=m(i);
    end
    %calcolo della trasformazione
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            a(i,j)=a(i,j)-m(i)*a(k,j);
        end
        b(i)=b(i)-m(i)*b(k);
    end
    % risoluzione del sistema triangolare
  x=solve_tri(triu(a), b);
end
```

Concludiamo questa lezione osservando che la condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU stabilita nel teorema (1.1) coincide con la condizione (1) per l'applicabilità del metodo di Gauss. Infatti vale il seguente risultato.

Teorema 2.1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora $A(1\colon k, 1\colon k)$ è invertibile per $k = 1, 2, \dots, j \leq n-1$ se e soltanto se $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ per $k = 1, 2, \dots, j \leq n-1$.

Dimostrazione. Si dimostra per indizione su j. Per $j = 1$ segue immediatamente da $A(1\colon 1, 1\colon 1) = a_{1,1}^{(0)}$. Assumiamo il risultato vero per $k \leq j-1$ e dimostriamo per $k = j$. Dalla relazione

$$E_{j-1}E_{j-2}\cdots E_1 A = F_j A = A_{j-1}$$

segue che F_j è triangolare inferiore con elementi uguali ad 1 sulla diagonale principale ed inoltre

$$F_j(1\colon \ell, 1\colon \ell)A(1\colon \ell, 1\colon \ell) = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(0)} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{\ell,\ell}^{(\ell-1)} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq \ell \leq j.$$

Si ha dunque che $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ per $k = 1, 2, \dots, j$ se e soltanto se $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ per $k = 1, 2, \dots, j-1$ e $a_{j,j}^{(j-1)} \neq 0$ e quindi per ipotesi induttiva se e soltanto se $A(1\colon k, 1\colon k)$ è invertibile per $k = 1, 2, \dots, j-1$ e $a_{j,j}^{(j-1)} = \dfrac{\det(A(1\colon j, 1\colon j))}{\det(A(1\colon j-1, 1\colon j-1))} \neq 0$ e dunque se e soltanto se $A(1\colon k, 1\colon k)$ è invertibile per $k = 1, 2, \dots, j$. $\square$

Lezione 3: Il Metodo di Gauss per Matrici Invertibili: Tecniche di Pivoting e Stabilità.

L'estensione del metodo di eliminazione gaussiana ad una generica matrice invertibile $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ senza assunzioni sull'invertibilità delle sue sottomatrici avviene mediante l'introduzione di opportune tecniche di riordinamento delle equazioni e/o delle variabili. Si osservi che dall'invertibilità di $A = A_0$ segue che esiste un elemento non nullo nella prima colonna, i.e., $\exists j\colon a_{j,1}^{(0)} \neq 0$. Detta P_1 allora la matrice di permutazione ottenuta dalla matrice I_n scambiando tra loro la prima e la $j-$ esima colonna si ha che $(P_1A_0)_{1,1} = a_{j,1}^{(0)}$ e dunque posso determinare E_1 tale da aversi $E_1P_1A_0\boldsymbol{e}_1 = \left[a_{j,1}^{(0)}, 0, \dots, 0\right]^T$. Poniamo

$$A_1 = E_1P_1A_0, \quad \boldsymbol{b}_1 = E_1P_1\boldsymbol{b}_0.$$

Dall'invertibilità di $A = A_0$ segue l'invertibilità di A_1 ed inoltre dalla regola di Laplace per il calcolo del determinante si ha

$$\det(A_1) = a_{j,1}^{(0)}\det(A_1(2\colon n, 2\colon n)),$$

per cui esiste un elemento non nullo nella prima colonna di $A_1(2\colon n, 2\colon n)$. Detti $a_{\ell,2}^{(1)}$, $\ell \geq 2$, questo elemento, P_2 la matrice di permutazione ottenuta dalla matrice I_n scambiando tra loro la seconda e la $\ell-$ esima colonna e E_2 la matrice elementare di Gauss tale che $E_2 P_2 A_1 \boldsymbol{e}_2 = \left[a_{1,2}^{(1)}, a_{\ell,2}^{(1)}, 0, \dots, 0\right]^T$ si ha

$$A_2 = E_2 P_2 A_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = E_2 P_2 \boldsymbol{b}_1.$$

Il processo così procede determinando matrici elementari gi Gauss $E_1, \dots E_{n-1}$ e matrici di permutazione (scambio) $P_1, \dots P_{n-1}$ tale che

$$E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} P_{n-2} \cdots E_1 P_1 A = R, \quad E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} P_{n-2} \cdots E_1 P_1 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{n-1}.$$

La risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è ricondotta alla risoluzione del sistema lineare $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{n-1}$. Inoltre posto

$$L = (E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} P_{n-2} \cdots E_1 P_1)^{-1} = P_1^T E_1^{-1} \cdots P_{n-2}^T E_{n-2}^{-1} P_{n-1}^T E_{n-1}^{-1},$$

si può ancora scrivere

$$A = L \cdot R$$

ma la matrice L non risulta generalmente triangolare inferiore (MatLab definisce L “ ”psychologically lower triangular matrix” (i.e. a product of lower triangular and permutation matrices”)). Si osserva comunque che

$$P_2 E_1 = P_2 (I_n - \boldsymbol{v} \boldsymbol{e}_1^T) = (I_n - \hat{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{e}_1^T) P_2,$$

per cui utlizzando ripetutamente questa proprietà di sostanziale commutatività si può scrivere

$$E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} P_{n-2} \cdots E_1 P_1 = (\hat{E}_{n-1} \hat{E}_{n-2} \cdots \hat{E}_1)(P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1),$$

da cui ponendo

$$\hat{L} = (\hat{E}_{n-1} \hat{E}_{n-2} \cdots \hat{E}_1)^{-1}, \quad P = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1,$$

si perviene alla conclusione che il metodo di eliminazione con scambi di righe calcola la fattorizzazione LU di una matrice permutata, i.e.,

$$PA = \hat{L} U.$$

La scelta dell'elemento pivotale è suggerita da valutazioni di stabilità numerica. Si può infatti dimostrare un risultato di stabilità all'indietro per cui se indichiamo con $\tilde{L}$ il fattore L effettivamente calcolato ed analogamente $\tilde{R}$ il fattore R effettivamente calcolato allora

$$\tilde{L} \tilde{R} = A + E, \quad \frac{\parallel E \parallel}{\parallel L \parallel \parallel R \parallel} = O(u). \tag{4}$$

Per minimizzare la norma della perturbazione è dunque essenziale evitare la crescita dei moduli degli elementi in L ed U. Per controllare gli elementi di L si può scegliere come pivot l'elemento di modulo massimo sulla colonna corrente, i.e.

se $|a_{j,k}^{(k-1)}| = \max_{k\le i\le n} |a_{i,k}^{(k-1)}|$ allora si scambia la riga k con la riga j al passo k. Questa tecnica detta del *massimo pivot parziale* garantisce che gli elementi di L hanno modulo minore o uguale ad 1. Gli elementi di U possono comunque crescere ma generalmente ciò non accade ed il metodo risultante è suggerito come metodo di scelta per la risoluzione di sistemi lineari densi di medie/piccole dimensioni (operatore "backslash" in MatLab). Il seguente programma MatLab implementa il metodo di eliminazione gaussiana per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

```
function [x]= gauss_pp(a,b)
%IL programma non esegue esplicitamente lo scambio tra le righe
% ma tiene traccia nel vettore nriga
n=length(b);
nriga=zeros(n,1);
x=zeros(n,1);
m=zeros(n,1);
for i=1:n
    nriga(i)=i;
end
%%riduzione in forma triangolare
for k=1:n-1;
max=0;
index=0;
%trova il pivot  nella colonna corrente
for j=k:n
    if abs(a(nriga(j),k))>max
        max=abs(a(nriga(j),k));
        index=j;
    end
end
%aggiorna il vettore nriga
if nriga(k)~=nriga(index)
    nn=nriga(k);
    nriga(k)=nriga(index);
    nriga(index)=nn;
end
%passo di eliminazione
for i=k+1:n
    m(nriga(i))=a(nriga(i),k)/a(nriga(k),k);
    a(nriga(i),k)=0;
    for j=k+1:n
        a(nriga(i),j)=a(nriga(i),j)-m(nriga(i))*a(nriga(k),j);
    end
    b(nriga(i))=b(nriga(i))-m(nriga(i))*b(nriga(k));
end
end
```

```
%risoluzione del sistema triangolare
x=solve_tri(triu(a(nriga,:)), b(nriga));
end
```

Il lettore confronti sperimentalmente i risultati generati dal programma con i risultati forniti dal risolutore (backslash) di MatLab.