CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2014/2015 – Appello 14/01/2015

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

Assegnati i punti $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, si definisce la sequenza di polinomi

$$p_1(x) = 1, \quad p_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1}(x - x_j),\ 2 \le i \le n+1.$$

1. Si dimostri che vale $p_{i+1}(x) = (x - x_i)p_i(x)$, $1 \le i \le n$.
2. Scrivere una funzione Matlab® che dati in input $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ e $z \in \mathbb{R}$ restituisce in output il vettore $\boldsymbol{p} = [p_2(z), \ldots, p_{n+1}(z)]$ delle valutazioni dei polinomi $p_i(x)$ nel punto z. Valutare il costo computazionale dell'algoritmo.
3. Per $\boldsymbol{x} = [-2, -1, 0, 1, 2]$ e $z = 0$ riportare il vettore $\boldsymbol{p}$ generato dall'algoritmo.
4. Sia $A = (a_{i,j})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da $a_{i,j} = p_j(x_i)$, $1 \le i, j \le n$. Dimostrare che A risulta invertibile.
5. Riportare la matrice $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ generata a partire dal vettore $\boldsymbol{x}$ al punto 3).
6. Dimostrare che il seguente problema di interpolazione ammette una ed una sola soluzione: determinare $a_1, \ldots, a_n$ in modo che il polinomio $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j(x)$ soddisfi le condizioni di interpolazione $p(x_i) = f_i$, $1 \le i \le n$.