

CALCOLO NUMERICO
A.A. 2017/2018 – Appello 24/06/2018

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

Esercizio 1 Si consideri l'equazione

$$f(x) = e^{x^2-1} + x - 1 = 0.$$

1. Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione.
2. Si mostri che l'equazione $f'(x) = 0$ ha una sola soluzione reale denotata con α .
3. Si dimostri che $\forall x_0 \neq \alpha$ la successione generata dal metodo delle tangenti applicato per la risoluzione di $f(x) = 0$ con punto iniziale x_0 è convergente.
4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $tol \in \mathbb{R}$ e x_0 genera la successione generata dal metodo delle tangenti a partire da x_0 arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k) .
5. Utilizzando la funzione al punto precedente con $tol = 1.0e-8$ determinare approssimazioni delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$.

Esercizio 2 Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \geq j \text{ o } j = n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $B = A + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T$.

1. Si mostri che B è invertibile.
2. Si consideri il metodo iterativo $M = \text{tril}(A)$, $N = M - B$ per la risoluzione di un sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si dimostri che il metodo è convergente.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $tol \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ implementa il metodo iterativo con vettore iniziale nullo arrestandosi quando $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq tol$ o $k \geq itmax$. Il programma deve restituire $\mathbf{x}^{(k+1)}$ e k , avere costo lineare per iterazione e non richiedere la memorizzazione della matrice.
4. Riportare il valore di k per $n = 64$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_{32}$, $tol = \{10^{-8}, 10^{-12}\}$ e $itmax = 100$.