

Def. Se A non è
superiormente limitato
scriviamo $\sup(A) = +\infty$

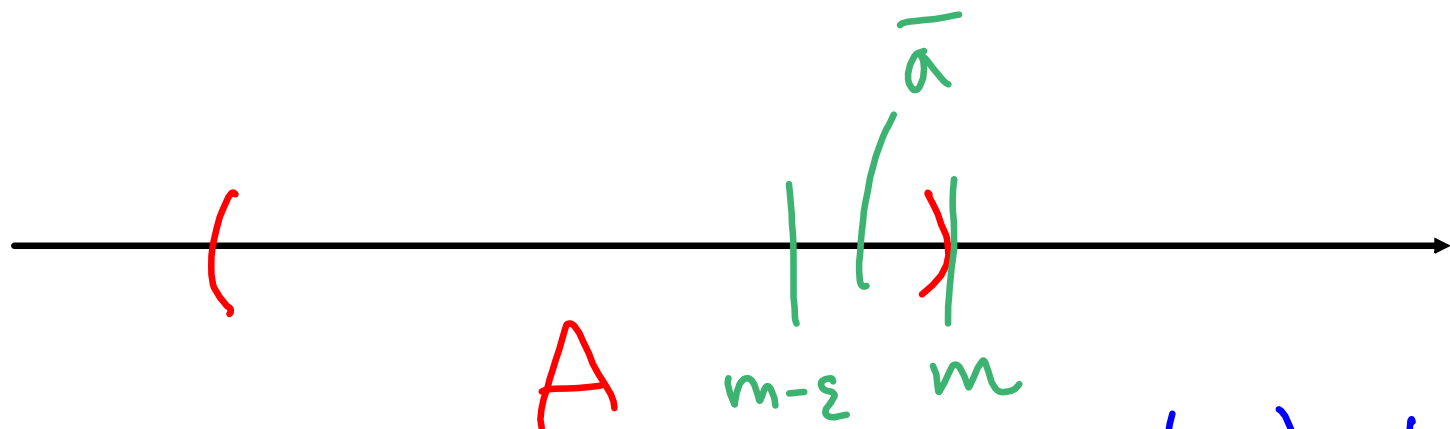
Oss: $A \neq \emptyset$ superiormente

limitato. $m = \sup(A)$

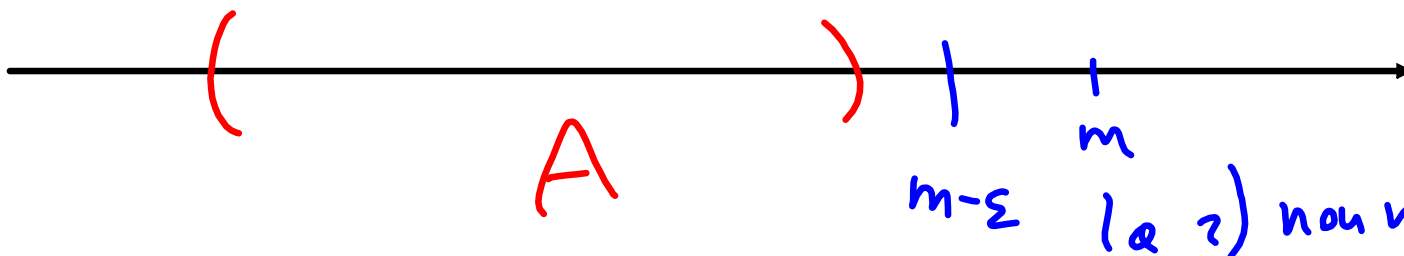
se e solo se valgono

$$1) \quad a \leq m \quad \forall a \in A$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \text{t.c.} \\ \bar{a} > m - \varepsilon$$



(a 1) vale



(a 2) non vale

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

quindi se $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty$$

Es: La scrittura

$\sup(A) < +\infty$ vuol
dire che A è superiormente
limitato.

Operazioni con $\pm\infty$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora

$$x + (-\infty) = -\infty$$

2) Se $x \neq -\infty$ allora

$$x + (+\infty) = +\infty$$

3) Se $x > 0$ allora

$$x \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$e \quad x \cdot (-\infty) = -\infty$$

4) Se $x < 0$ allora

$$x(-\infty) = +\infty$$

$$x(+\infty) = -\infty$$

Operazioni vietate

$$(+\infty) + (-\infty) = ?$$

$$0 \cdot (+\infty) = ?$$

$$0 \cdot (-\infty) = ?$$

Operazioni valide

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

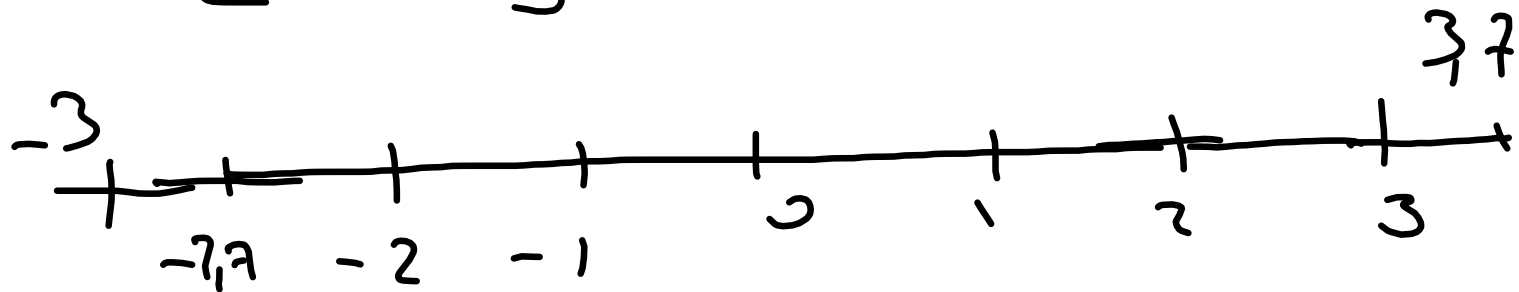
Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se
 A è superiormente limitato
allora A ha massimo, se
è inferiormente limitato
ha minimo.

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice
parte intera di x

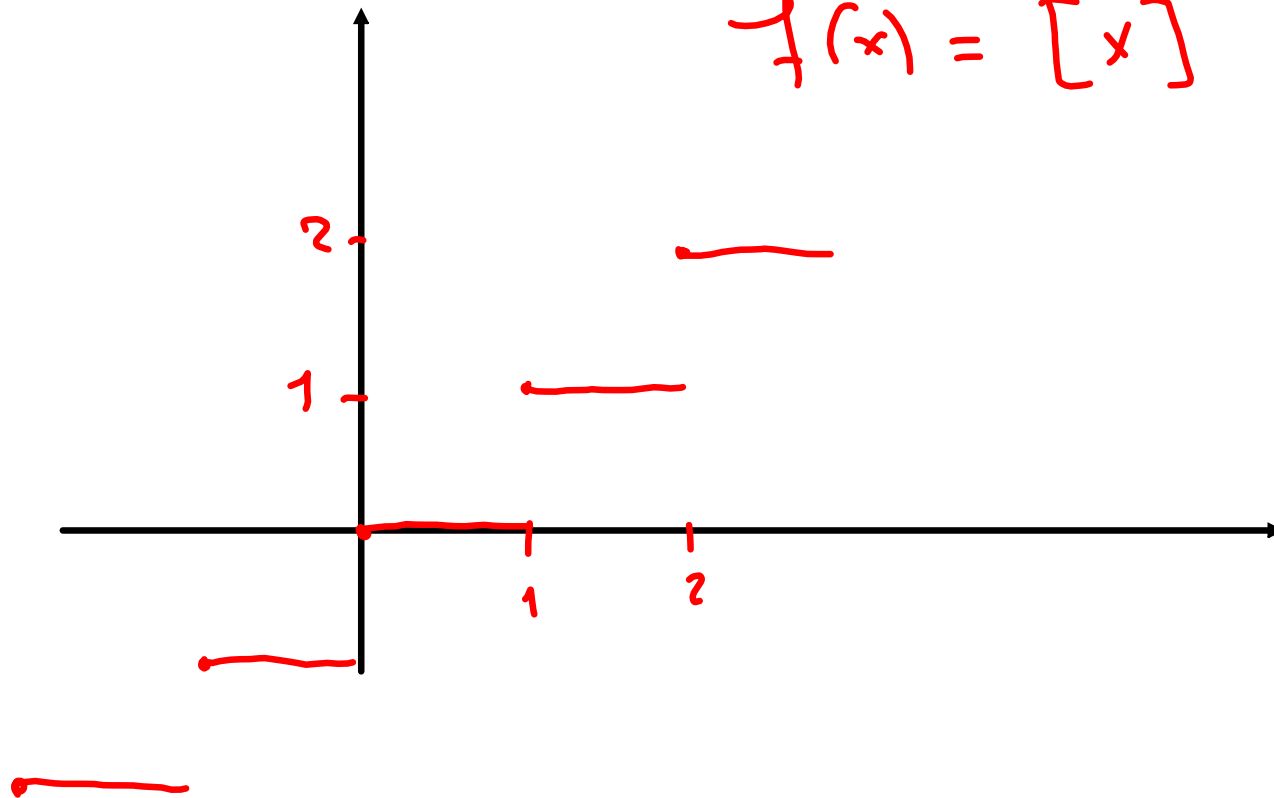
$$[x] = \max \{ m \in \mathbb{Z} : m \leq x \}$$

$$[37/10] = 3$$

$$[-27/10] = -3$$



$$f(x) = [x]$$



Def: $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

a) f si dice limitata sup. se
 $f(A)$ è limitato sup.

(limit. inf, limitata).

b) f ha massimo se $f(A)$ ha
massimo. M è il max di f

se $M = \max(f(A))$.

lo stesso per $\min(f)$.

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$.

se f non è limitata superiormente.

si scrive $\sup(f) = +\infty$

$\inf$ - - -

d) Se f ha massimo ogni
 $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = \max(f)$

si dice punto di massimo
per f .

Oss: Il massimo di f è
unico, il punto di massimo
potrebbe non esserci.

$$E_s: f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$\max(f) = 1$$

$$f(A) = [-1, 1]$$

$$A = \mathbb{R}$$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo

$x_1 = \frac{5}{2}\pi$ è punto di massimo

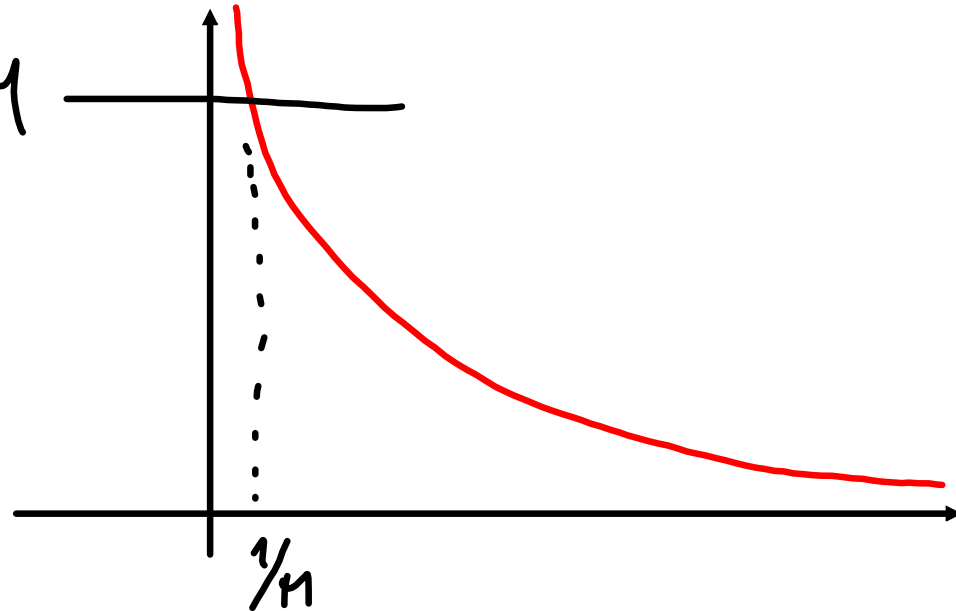
$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ è
punto di massimo.

$$E_s: \quad f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sup(f) = +\infty$$

$$\inf(f) = 0$$



f không có cực đại cực tiểu

Oss: $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

a) Se A ha max e f é deb.

crescente $\Rightarrow f$ ha max e

$$\max(f) = f(\max(A))$$

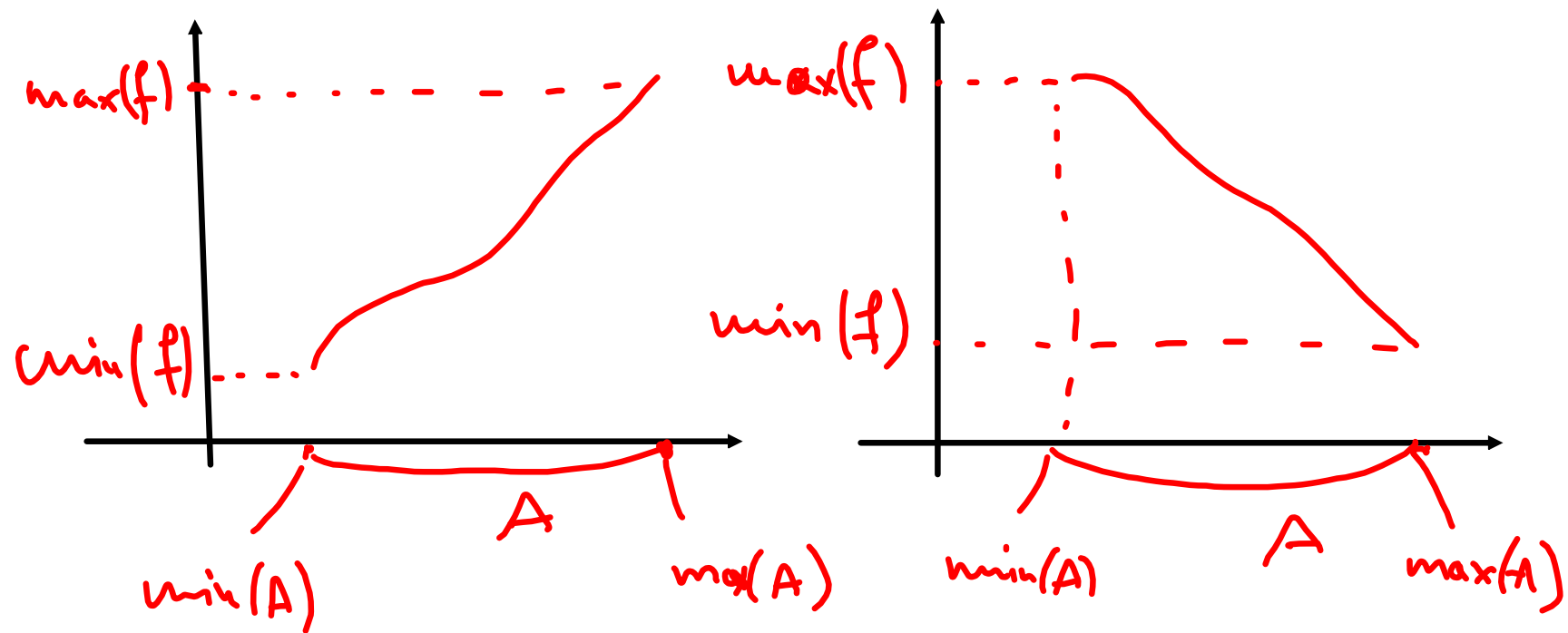
b) Se A ha mínimo e f é deb.

decrescente $\Rightarrow f$ ha mínimo e

$$\min(f) = f(\min(A))$$

c) Se A ha max e f é de b.o.l.m.
decrecente $\Rightarrow f$ ha minimo e
$$\min(f) = f(\max(A))$$

d) Se A ha min e f é de b.o.l.m.
decrecente $\Rightarrow f$ ha max e
$$\max(f) = f(\min(A)).$$



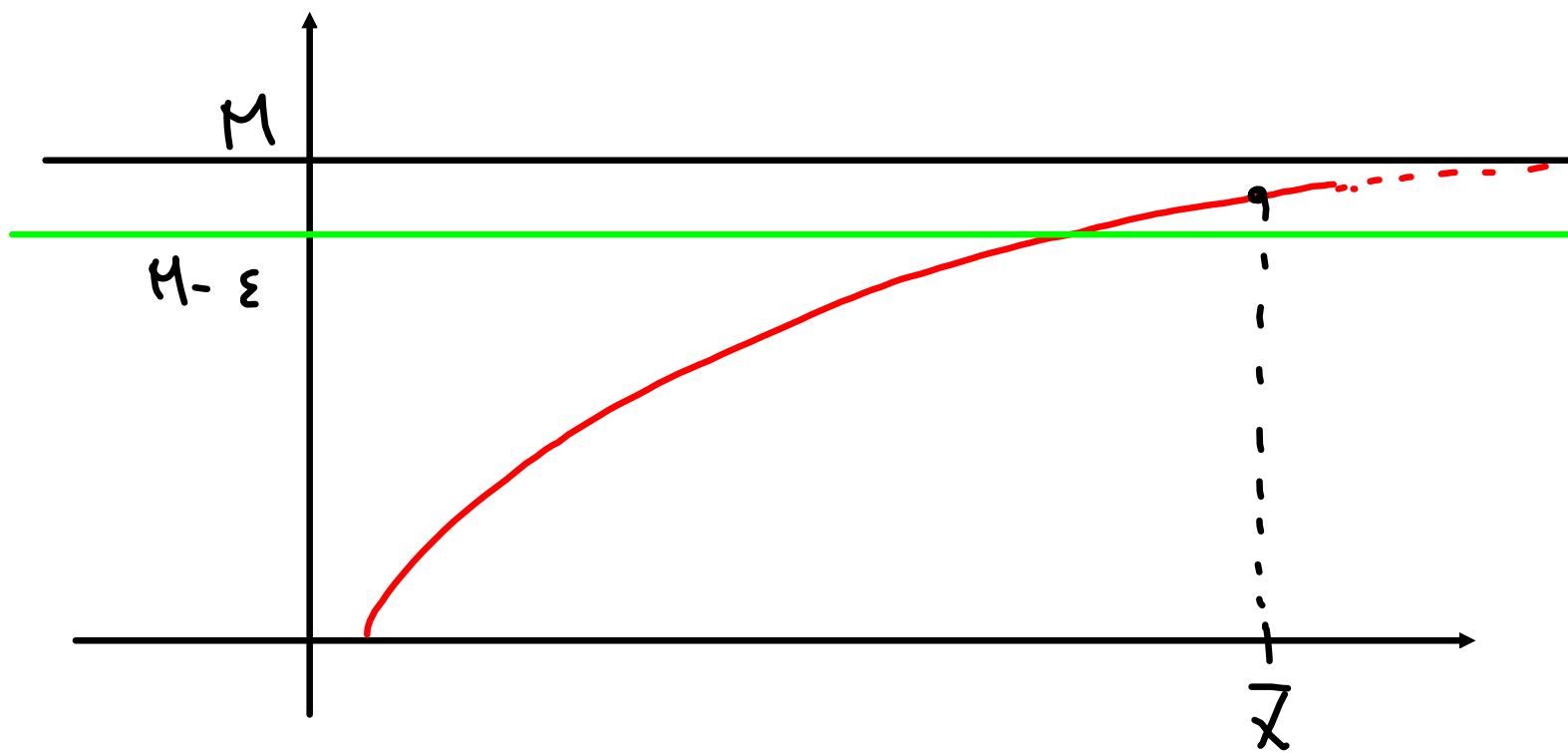
$$O_{ss}: f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M = \sup(f) \quad \text{se e solo se} \\ \text{valogoso}$$

$$1) \quad f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A \quad \text{s.t.}$$

$$f(\bar{x}) > M - \varepsilon$$



Valore assoluto

Def. $\forall x \in \mathbb{R}$ si dice
valore assoluto di x

$$|x| = \max \{x, -x\}$$

Proprietăți.

$$1) \quad x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad |x| = x \quad \text{se } x \geq 0 \quad \begin{matrix} \cdot - \\ \cdot - \end{matrix}$$

$$|x| = -x \quad \text{se } x \leq 0$$

$$3) \quad |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4) \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$5) \quad |-x| = |x|$$

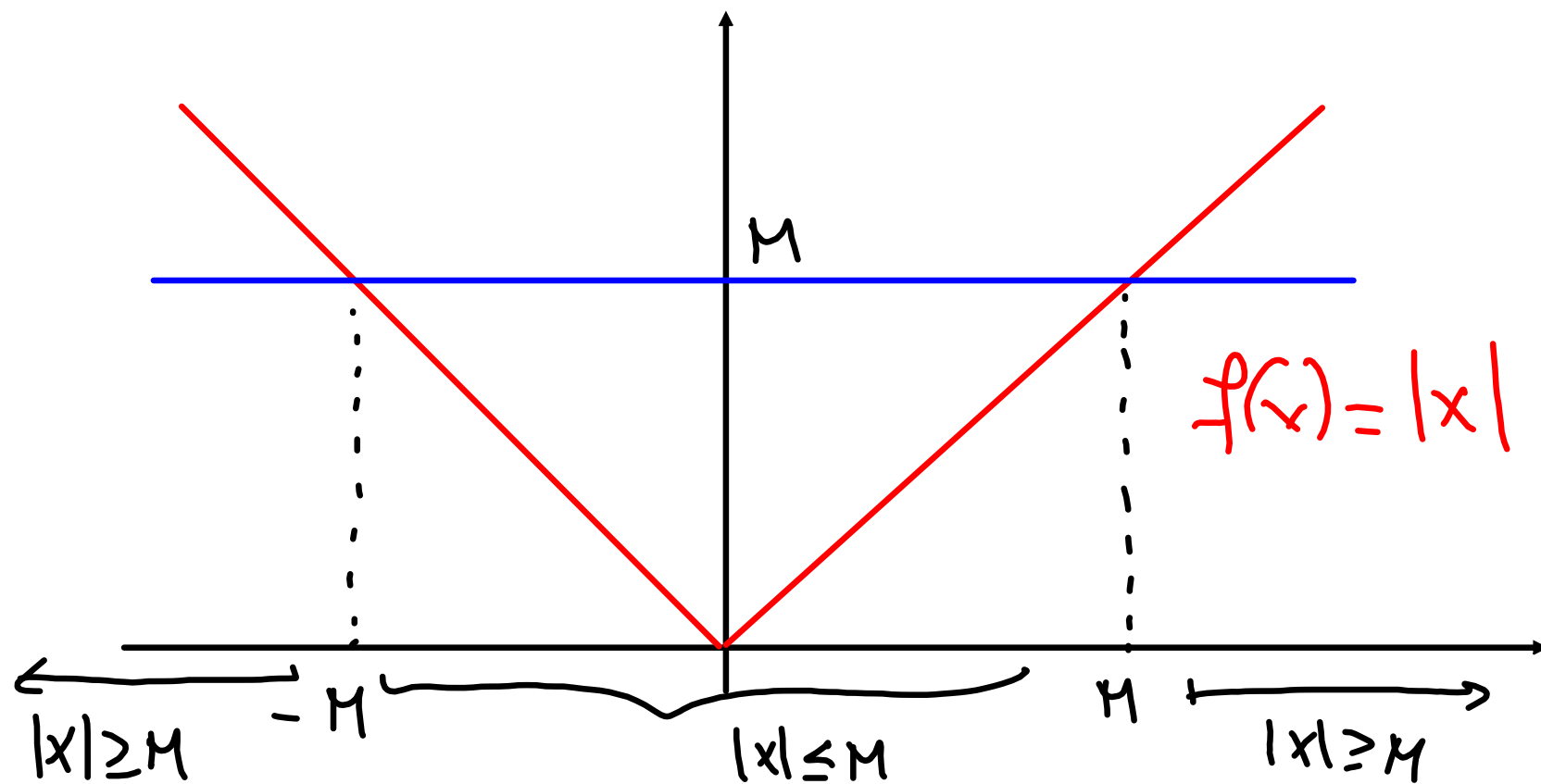
$$6) \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

7) $|x| \leq M$ x e solo se

$$-M \leq x \leq M$$

8) $|x| \geq M$ se e solo se

$$x \geq M \text{ oppure } x \leq -M$$



$$|x| \geq M \Leftrightarrow x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$$

$$M \geq 0$$

$$\text{Ex } M < 0$$

$$|x| \geq M \quad ? \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| < -3 \quad \emptyset$$

Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

$$O_{ss} : \quad |a+b+c| \leq |a+b| + |c| \\ \leq |a| + |b| + |c|$$

Def: L'insieme di
definizione di una funzione
è il più grande sottoinsieme
di $\mathbb{R}$ dove le operazioni
descritte in f hanno senso.

Es: L'insieme di definizione
di $f(x) = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$

$$E_s: \log x$$

is defined in $(0, +\infty)$

$$E_s: \log(7x) \quad \text{in } (0, +\infty)$$

$$E_s: \log(x^2) \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$E_s: 2 \log x \quad \text{in } (0, +\infty)$$

$$\log(x^2) = 2 \log x$$

$\forall x > 0$

$$\text{se } x < 0 \Rightarrow -x > 0$$

$$\log(x^2) = \log((-x)^2)$$

$$= 2 \log(-x)$$

$$\log(x^2) = 2 \log|x| \quad \forall x \neq 0.$$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = ?$$

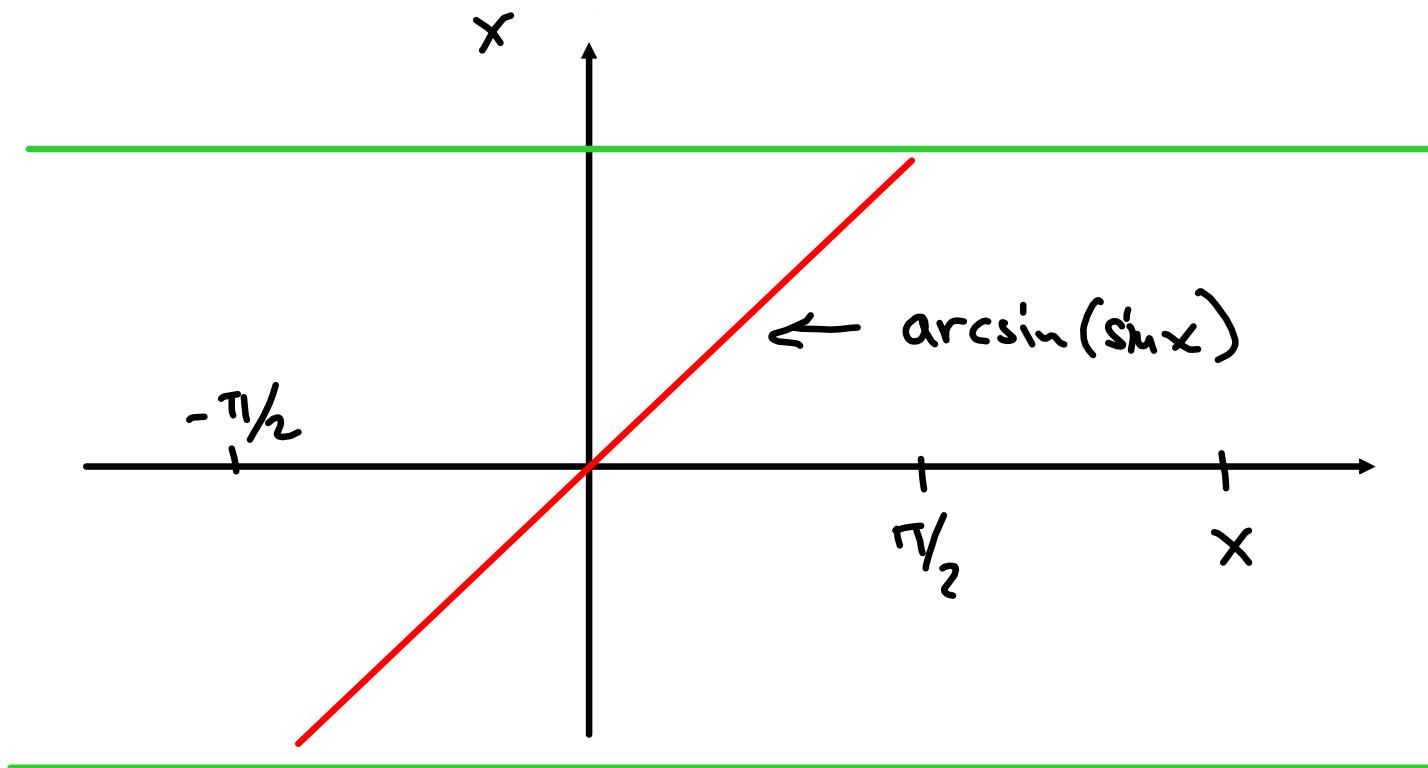
è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} [-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

se $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ quanto vale?

non vale x sicuramente



$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$