Logica per la Programmazione

Lezione 3

- Dimostrazione di Tautologie e Sintassi del Calcolo Proposizionale
    - Antonio, Corrado e Bruno... formalmente
    - Tautologie: dimostrazioni e controesempi
    - Sintassi del Calcolo Proposizionale
    - Ambiguità, precedenza tra connettivi e parentesi

Dimostrazioni di Tautologie: torniamo all'esempio del Test

- **Premesse**:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; $(C \Rightarrow A)$
  - Condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. $(A \Rightarrow B)$
- **Il giorno successivo, quali dei seguenti fatti possiamo affermare con certezza?**
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno. $(C \Rightarrow B)$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema. $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado $(B \Rightarrow C)$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno. $(\neg C \Rightarrow \neg B)$

Come possiamo essere certi della risposta?

- Bisogna determinare quale delle ultime 4 formule è *conseguenza logica* delle premesse, cioè quale delle seguenti formule è una tautologia:
  1. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  2. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \ \wedge \ \neg B \ \wedge \ \neg C)$
  3. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  4. $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
- Si possono verificare con tabelle di verità o dimostrazioni, usando le leggi viste.
- Mostriamo che (1) è una tautologia, e che (2), (3) e (4) non sono tautologie

La (1) è una Tautologia (Transitività dell'implicazione)

LAVAGNA...

$$
\begin{array}{lll}
 & ((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B) & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (C \Rightarrow B) & \\
\equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow),\ 3\ \text{volte}\} \\
 & \neg((\neg C \vee A) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg C \vee B) & \\
\equiv & & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\neg C \vee A) \vee \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee B) & \\
\equiv & & \{(\text{De Morgan})\ 2\ \text{volte},\ (\text{Doppia Neg.})\} \\
 & (C \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee B) & \\
\equiv & & \{(\text{Comm.}),\ (\text{Assoc.})\} \\
 & ((C \wedge \neg A) \vee \neg C) \vee ((A \wedge \neg B) \vee B) & \\
\equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\
 & ((C \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)) & \\
\equiv & & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\
 & (\mathbf{T} \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((A \vee B) \wedge \mathbf{T}) & \\
\equiv & & \{(\text{Unità})\} \\
 & (\neg A \vee \neg C) \vee (A \vee B) & \\
\equiv & & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\
 & (\mathbf{T} \vee \neg C) \vee B & \\
\equiv & & \{(\text{Dominanza})\} \\
 & \mathbf{T} &
\end{array}
$$

Come si vede che una Formula **non è** una Tautologia?

- Esempio: (3) $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
  - Determiniamo valori di verità per A, B e C che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $(B \Rightarrow C)$ deve essere falso, quindi $\{B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$
  - A questo punto si vede che per qualunque valore di A la premessa è vera.
  - Quindi le seguenti interpretazioni rendono la formula falsa: $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$ e $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{1}, C \mapsto \mathbf{0}\}$

Come si vede che una Formula non è una Tautologia? (2)

Mostrare che $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ non è una tautologia

- Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{0}\}$
- Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{0}, B \mapsto \mathbf{0}\}$
- Resta da controllare che renda la formula falsa

Tautologia o no?

La formula $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ è una tautologia oppure no?

- Proviamo a mostrare che non lo è, cercando un controesempio. Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
- Quindi $\{B \mapsto \mathbf{0}\}$
- La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
- Quindi $\{A \mapsto \mathbf{1}\}$
- Ma l'interpretazione trovata, $\{A \mapsto \mathbf{1}, B \mapsto \mathbf{0}\}$ non rende falsa la formula, perché $A \Rightarrow B$ è falso.
- Infatti la formula è una tautologia, come si può dimostrare facilmente, e viene chiamata **Modus Ponens**.

Altre Leggi utili: Leggi di Complemento

$$\boxed{\begin{array}{ll} p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q & (\mathit{Complemento}) \\ p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q & \end{array}}$$

Dimostrazione di $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

$$\begin{array}{lll} & p \vee (\neg p \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) & \\ \equiv & & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\ & \mathbf{T} \wedge (p \vee q) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (p \vee q) & \end{array}$$

Leggi di Assorbimento

$$\boxed{\begin{array}{ll} p \wedge (p \vee q) \equiv p & (\mathit{Assorbimento}) \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p & \end{array}}$$

Dimostrazione di $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$\begin{array}{lll} & p \wedge (p \vee q)) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (p \vee \mathbf{F}) \wedge (p \vee q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & p \ \vee (\mathbf{F} \wedge q) & \\ \equiv & & \{(\text{Zero})\} \\ & p \vee \mathbf{F} & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & p & \end{array}$$

Inferenze Corrette e Tautologie

- Il Calcolo Proposizionale permette di formalizzare semplici inferenze/deduzioni/dimostrazioni, e di verificarne la correttezza
- Esempio: *"Normalmente se piove non esco, ma ieri sono uscito, quindi non pioveva"*
- Formula proposizionale corrispondente:

$$((P \Rightarrow \neg E) \wedge E) \Rightarrow \neg P$$

- **L'inferenza è corretta se e solo se la formula è una tautologia**

Inferenze Corrette e Tautologie (2)

- Esempio: *"Normalmente se piove non esco, ma ieri non pioveva, quindi sono uscito"*
- Formula proposizionale corrispondente:

$$((P \Rightarrow \neg E) \wedge \neg P) \Rightarrow E$$

- **L'inferenza è corretta se e solo se la formula è una tautologia**
- In questo caso no: trovare un controesempio!

$$\mathit{Soluzione}: \ \{E \mapsto \mathbf{F}, P \mapsto \mathbf{F}\}$$

- In generale, possiamo rapprensentare con delle formule proposizionali delle **tecniche di dimostrazione**: saranno corrette se e solo se la formula è una tautologia

Sintassi del Calcolo Proposizionale, nuovamente...

- Stringhe sull'alfabeto di simboli $\{\equiv, \wedge, \ldots, \neg, (,), \mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathrm{p}, \mathrm{q}, \ldots\}$
  - Alcune sono formule: $((p \wedge q) \wedge r)$, $(p \vee F)$, $(\mathbf{F} \equiv \mathbf{T})$, $\ldots$
  - Altre *non* sono formule: $p \wedge \vee$, $\mathbf{T} \equiv \neg$, $()$, $\ldots$
- Formule Proposizionali definite dalla seguente grammatica:

$$
\begin{array}{rl}
\mathit{Prop} ::= & \\
& (\mathit{Prop} \equiv \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \wedge \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \vee \mathit{Prop}) \mid \\
& (\mathit{Prop} \Rightarrow \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \Leftarrow \mathit{Prop}) \mid (\neg \mathit{Prop}) \mid \\
& \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \\
& p \mid q \mid \ldots
\end{array}
$$

- Da questa definizione segue che in una formula ogni occorrenza di un connettivo si trova tra parentesi.
- Ad esempio secondo questa definizione le seguenti non sono formule: $p \wedge q \wedge r$, $p \vee F$, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$
- Per alleggerire la notazione, vorremmo rimuovere le parentesi ma questo deve essere fatto con cura.

L'importanza delle parentesi

- La sequenza di simboli $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$ può essere interpretata come
  1. $((P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow Q)$ oppure come
  2. $(P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q))$
- Per l'interpretazione $P \mapsto 0, Q \mapsto 0$, 1. è falsa mentre 2. è vera.
- Esercizio: mostrare che la 2. è una tautologia, ma 1. no.
- In modo simile, $(\neg(P \vee Q))$ è ben diversa da $((\neg P) \vee Q)$.
- Soluzione:
  - Le parentesi più esterne vengono sempre eliminate. Ad esempio $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow Q$ e $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ sono formule.
  - Si adottano dei livelli di precedenza per i connettivi ...

Precedenza tra Connettivi

- Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

operatore	*livello di precedenza (crescente)*
$\equiv$	0
$\Rightarrow, \Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3

- Per esempio,
  - $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere come $P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
- Si noti che **non** stabiliamo
  - una precedenza tra $\wedge$ e $\vee$
  - regole di associatività per connettivi binari ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, ...)

Come leggere le formule...

- $P \wedge Q \Rightarrow R \equiv R \vee P \Rightarrow S$
  Ok, per le regole di precedenza diventa $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv ((R \vee P) \Rightarrow S)$
- $P \wedge Q \wedge R$
  La formula è *sintatticamente ambigua* ma per (Associatività-$\wedge$) abbiamo $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$, quindi la consideriamo **sintatticamente corretta**
- $P \wedge Q \vee R$
  Sintatticamente errata!!! Mostrare che $(P \wedge Q) \vee R$ non è equivalente a $P \wedge (Q \vee R)$
- $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ **Sintatticamente errata!!!**
- $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ Ok, si legge $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ (Elim-$\Rightarrow$), **ma attenzione quando si applica!**
  $\underline{P \Rightarrow Q \wedge R} \equiv \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)}$

Altre leggi utili: dimostrarle come esercizio

$P \wedge Q \Rightarrow P$	$(Sempl - \wedge)$
$P \Rightarrow P \vee Q$	$(Intro - \vee)$
$P \Rightarrow Q \;\equiv\; \neg Q \Rightarrow \neg P$	$(Contropositiva)$
$(P \equiv Q) \;\equiv\; (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$(Elim- \equiv -bis)$
$P \wedge Q \Rightarrow R \;\equiv\; P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$	$(Scambio)$