

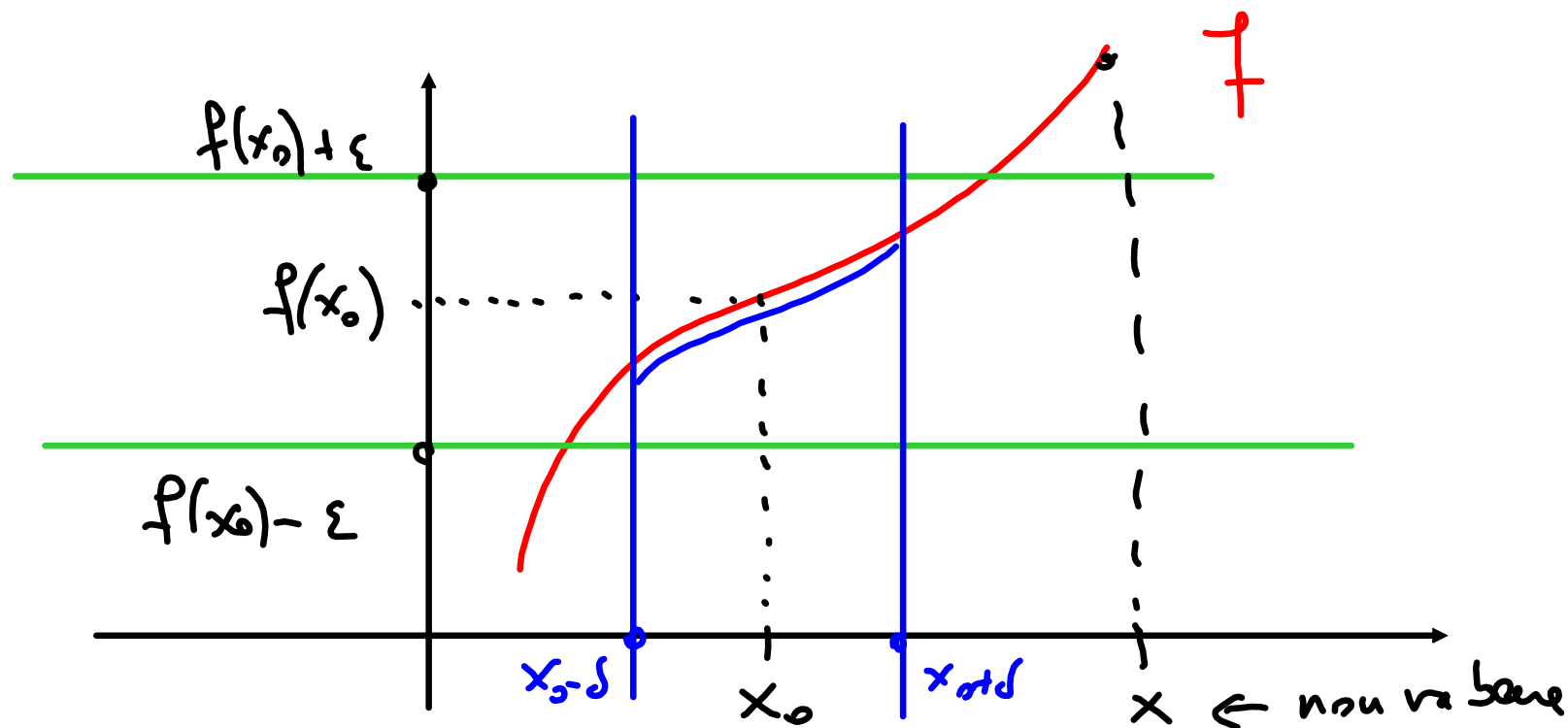
Continuità

Def: $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. f si dice continua

in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$x \in A$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

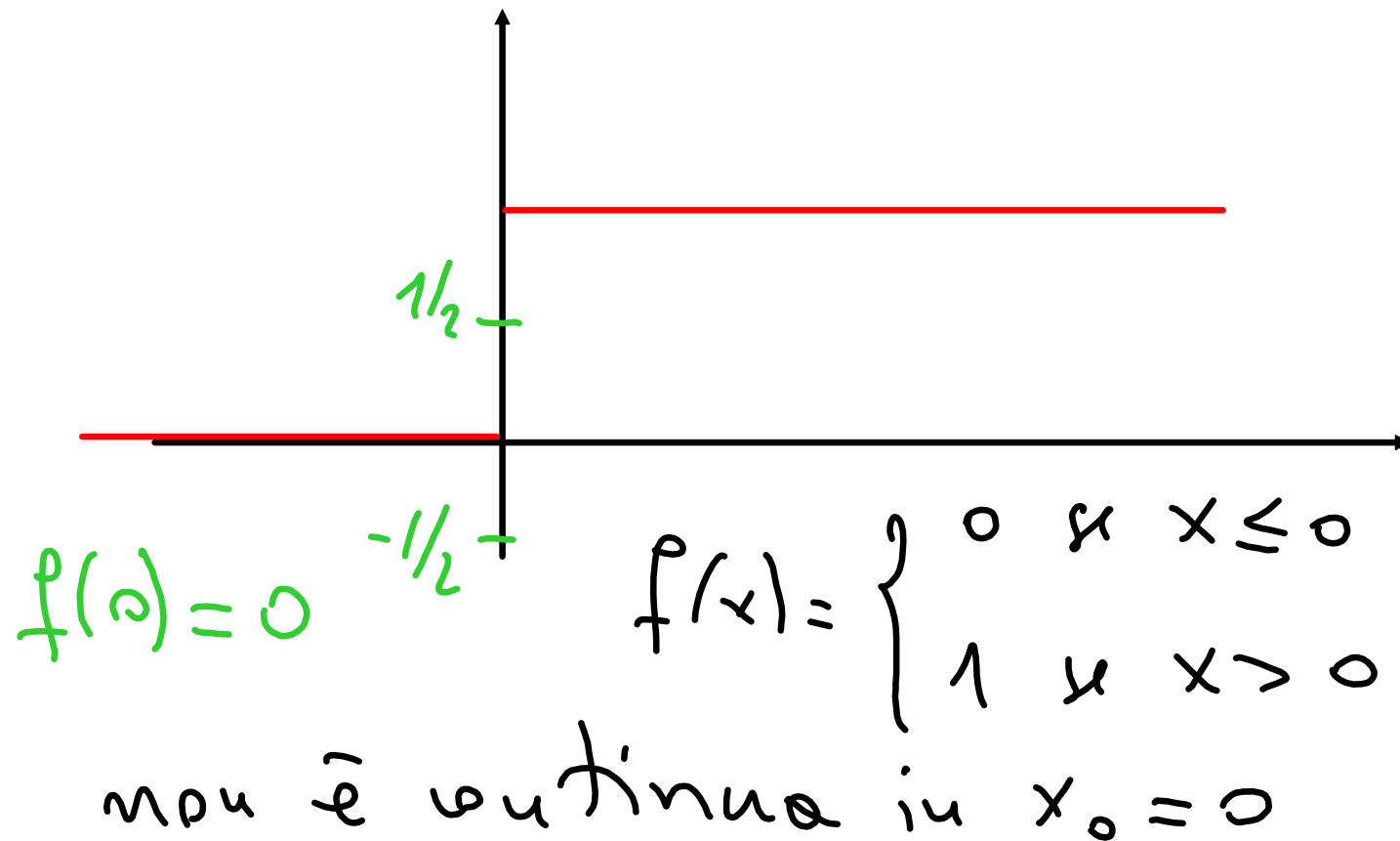


$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{vuol dire}$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Quali funzioni non sono continue?



se scelgo $\varepsilon = 5$ la definizione
di continuità è verificata

perché

$$0 - 5 < f(x) < 0 + 5 \quad \forall x$$

ma deve valere $\forall \varepsilon > 0$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

dovrei trovare $\delta > 0$ l.r. se

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow$$

$\uparrow$
 x_0

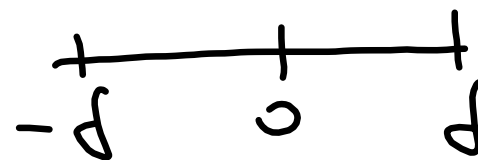
$$\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$\uparrow$
 $f(x_0)$

non lo posso trovare perché

$|x - 0| < \delta$ vuol dire

$$-\delta < x < \delta$$



$$\text{ma } \forall x \in (0, d)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 > \frac{1}{2}$$

e invece dovrebbe essere

$$-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$$

Teorema

Se f e g sono continue in x_0
allora

1) $f+g$ è continua in x_0

2) $f \cdot g$ è continua in x_0

3) $|f|$ è continua in x_0

Con questo teorema
posso dire che tutti i
polinomi sono continui.

$f(x) = x$ è continua.

$\Rightarrow x^2 = x \cdot x$ è continua.

$x^3, x^4, \dots, x^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
sono continue

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} +$$

$$+ \dots + a_1 x + a_0$$

è somma di funzioni
continue.

Def. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$

diciamo che f è continua in B

se f è continua in $x_0 \forall x_0 \in B$.

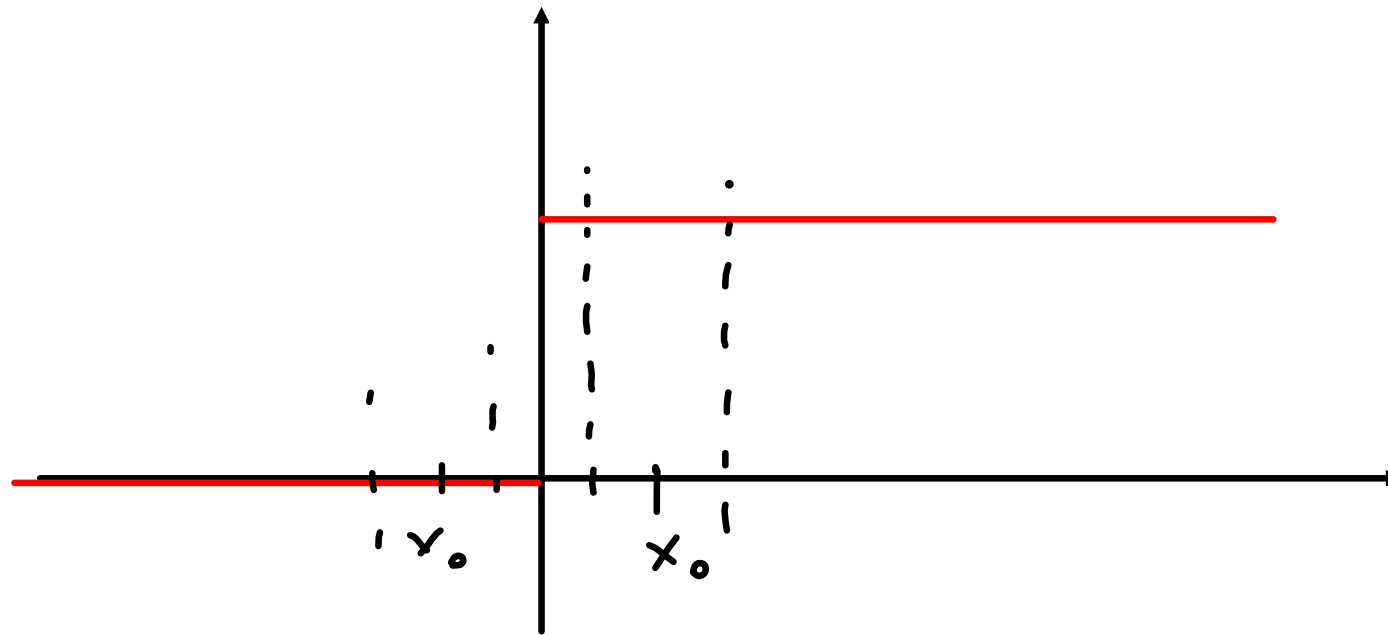
Se dico semplicemente
che f è continua
intendo continua in tutto
il suo insieme di definizione.

$$\text{Es: } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\underline{Es}: g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\bar{e}$ continua in tutto
il suo insieme di definizione
che $\bar{e} \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



Permanenza del segno.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. Se f è continua in x_0

e $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0$

t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$

allora $f(x) > 0$.

Stesso risultato se $f(x_0) < 0$.

dim: $f(x_0) > 0$

Scego $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ nella definizione
di continuità. Allora $\exists \delta > 0$

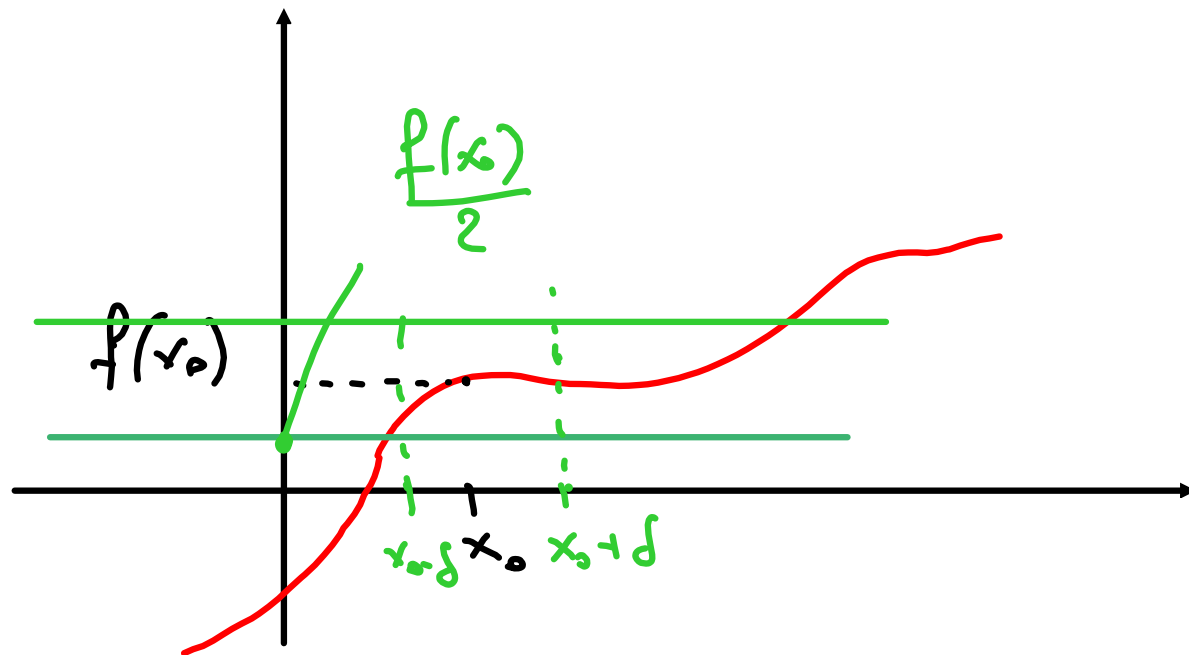
t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$

risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

cioè $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

□



Corollario : Se f è continua
in x_0 e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$
allora $\exists \delta > 0$ t.c. se
 $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ allora
 $f(x) > M$

dim : applico il teorema
precedente a $g(x) = f(x) - M$. $\square$

Teorema: $A \subset \mathbb{R} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in A$. Se f è continua in x_0
e $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è
continua in x_0 .

Oss: Il teorema sulla permanenza
del segno mi permette di dire
che $\frac{1}{f}$ è definito in un intervallo

intorno a x_0

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$\Rightarrow$ ha senso parlare di continuità
in x_0 .

Corollario: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f e g

continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$

allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 .

dim.: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. $\square$

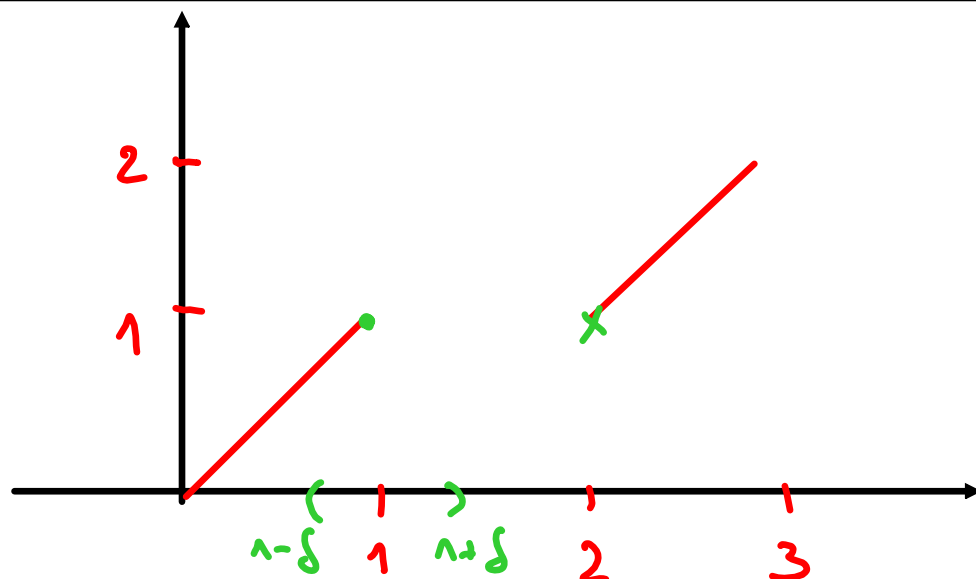
Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

$f: I \rightarrow B$. Se f è
continua in I e invertibile
allora f^{-1} è continua in B .

L'ipotesi che il dominio sia
un intervallo è necessaria.

$$\underline{E}_5 : f : [0,1] \cup (2,3] \rightarrow [0,2]$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{if } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



f è iniettiva? Sì.

f è continua?

In $x_0 = 2$ f non è definita
quindi non ha senso domandarsi
se è continua.

f è continua in $x_0 = 1$?

devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$A = [0, 1] \cup (2, 3]$$

se scelgo δ piccolo (cioè < 1)

$$\Rightarrow (1 - \delta, 1 + \delta) \cap A = (1 - \delta, 1]$$

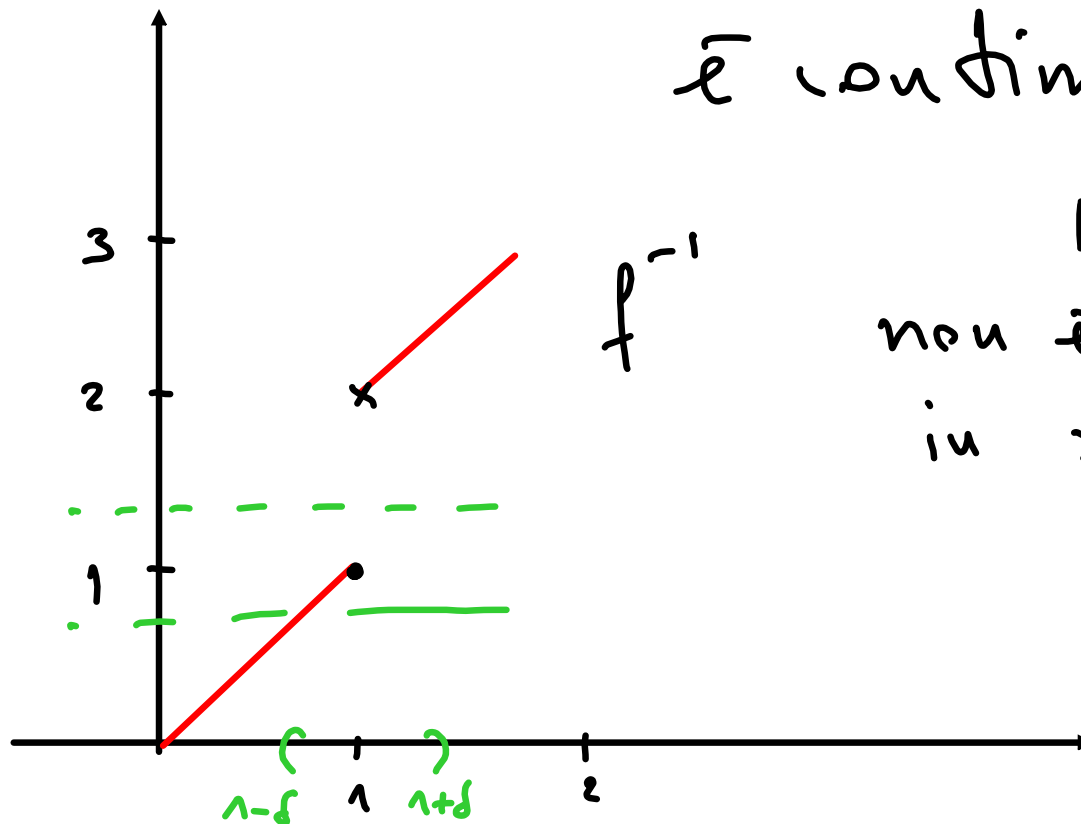
quindi non devo verificare
niente a destra di $x_0 = 1$.

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 = 1$.

f è surgettiva.

Chi è l'inversa?

$\bar{e}$ continua?



No
non $\bar{e}$ continua
in $x_0 = 1$.

Continuità delle funzioni elementari

polinomi sono continui

funzioni razionali sono
continue nell'insieme di definizione

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad p, q \text{ polinomi}$$

$$f(x) = \frac{5x^2 + 7}{x^3 + 4x + 2}$$

Assumeremo che
 e^x , $\sin x$, $\cos x$
sono continue
di conseguenza lo sono
anche

$\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$
 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

Teorema: $f: A \rightarrow B$

$g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$

Se f è continua in x_0 e g
è continua in y_0 allora

$g \circ f$ è continua in x_0

E_s: $e^{\sin x}$ è continua

$f(x) = \sin x$ $g(y) = e^y$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

$$= e^{f(x)} = e^{\sin x}.$$

Oss: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
continuous in $[a, b]$. Allora

$$\sup_{(a, b)} (f) = \sup_{[a, b]} (f)$$

$$\inf_{(a, b)} (f) = \inf_{[a, b]} (f)$$

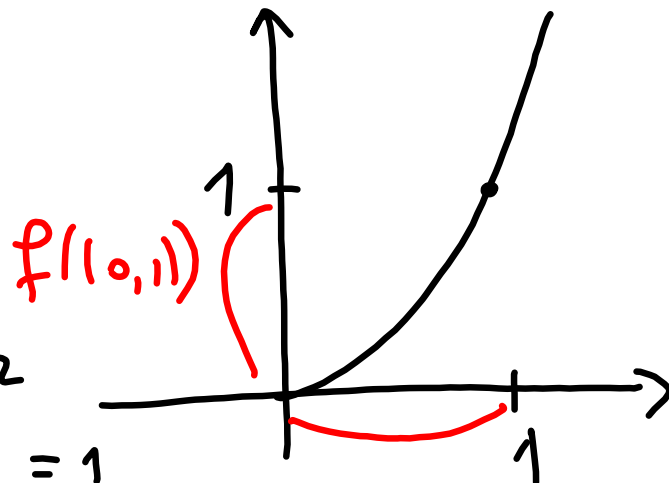
$$\underline{E} : f(x) = x^2$$

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sup_{[0, 1]} f(x) = \max_{[0, 1]} f = 1^2 = 1$$

$$\sup_{(0, 1)} f(x) = \sup(f((0, 1))) = \sup(0, 1) = 1$$

non è un max.



Teorema degli zeri

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora

$\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

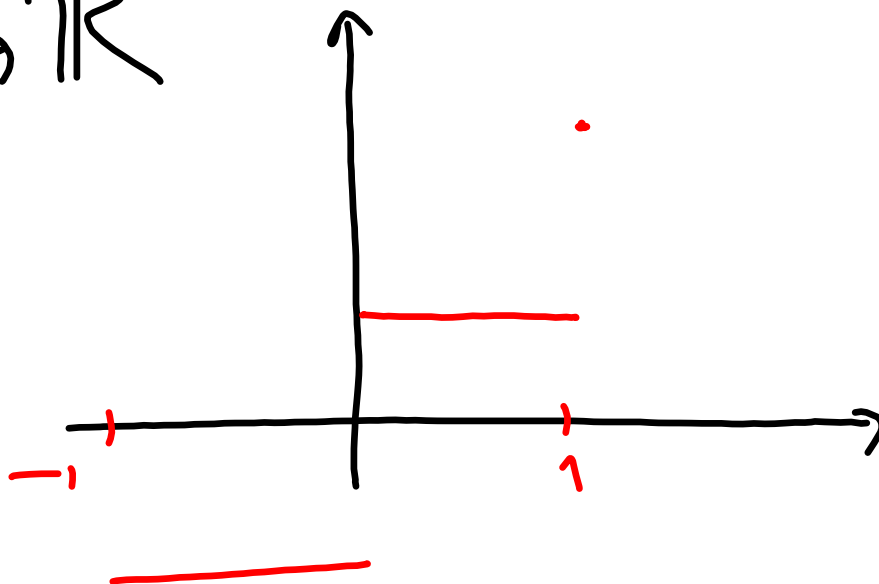
L'ipotesi di continuità è
necessaria.

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2}$$

$$f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2}$$



f assume valori discorsi
agli estremi ma non si
annulla mai.

Teorema di valori intermedi

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
continua. Allora
 $f(I)$ è un intervallo.