

elisabetta.chiodaroli@unipi.it

Àcerbi - Buttazzò
Analisi Matematica ABC

elearning.di.unipi.it

---> Corso di Laurea in Informatica

-----> Analisi Matematica (B)

Ricevimento: venerdì' 14.30-16.30 e previo
appuntamento via email

Insiemi numerici

\mathbb{N} numeri naturali
interi positivi
compreso 0

\mathbb{Z} numeri interi
positivi e negativi

\mathbb{Q} razionali
= "frazioni"

$$\frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$$q \neq 0$$

\mathbb{R} reali

\mathbb{Q} + molto altro

es. $\sqrt{2}$, π , e ...

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

dim : per assurdo
supponiamo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

allora $\exists p, q \in \mathbb{N}$

$$\text{t.c. } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

posso supporre
P e q non entrambi
pari

$$2 = \frac{P^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow P^2 = 2q^2$$

quindi p^2 è pari

$\Rightarrow p$ è pari

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.c

$$p = 2m$$

$$\Rightarrow p^2 = 4m^2$$

$$\Phi^2 = 2q^2$$

$$\Phi^2 = 4m^2$$

$$\cancel{2}q^2 = \cancel{4}m^2$$

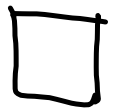
$$q^2 = 2m^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari

$\Rightarrow q$ è pari

assurdo.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$



Intervalli di \mathbb{R}

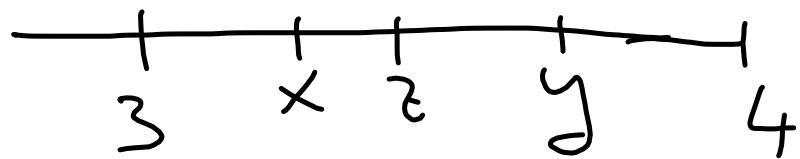
Def: $I \subset \mathbb{R}$ si dice
intervallo se $\forall x, y \in I$
con $x < y$, dato

$$z : x < z < y$$

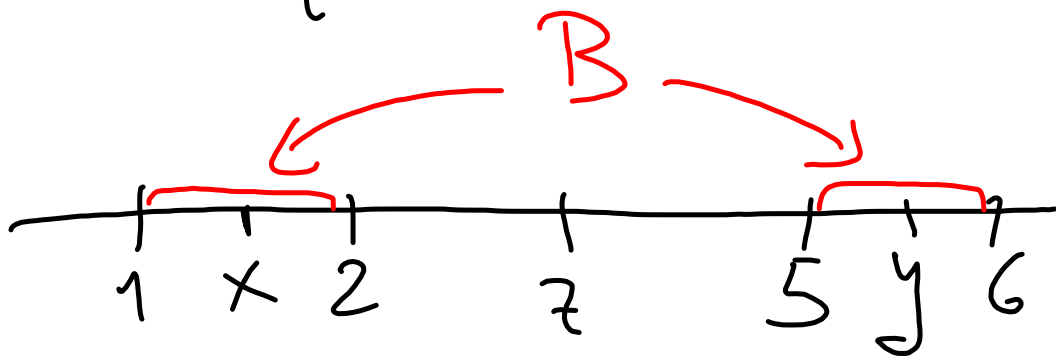
risulta $z \in I$.



$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 6\}$$



$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{11}{2}$$

$$z = 3$$

$$x < z < y$$

$$z \notin B.$$

$C = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
non è un intervallo



Notazioni

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
intervallo chiuso

$(a, b) =]a, b[=$

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
semiretta chiusa

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
semiretta aperta

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Funzioni

Terna di oggetti

due insiemi

$A =$ dominio

$B =$ codominio

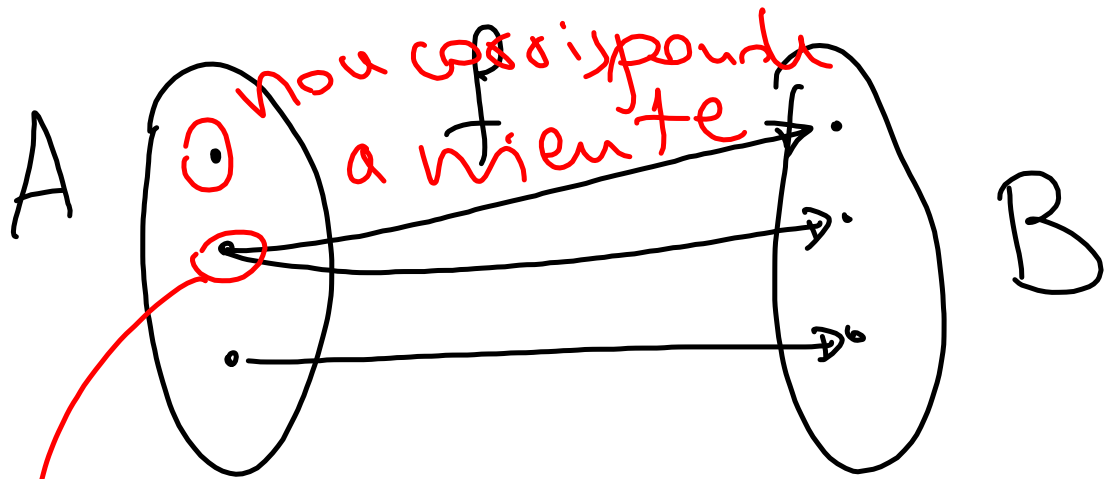
f legge

$$f: A \rightarrow B$$

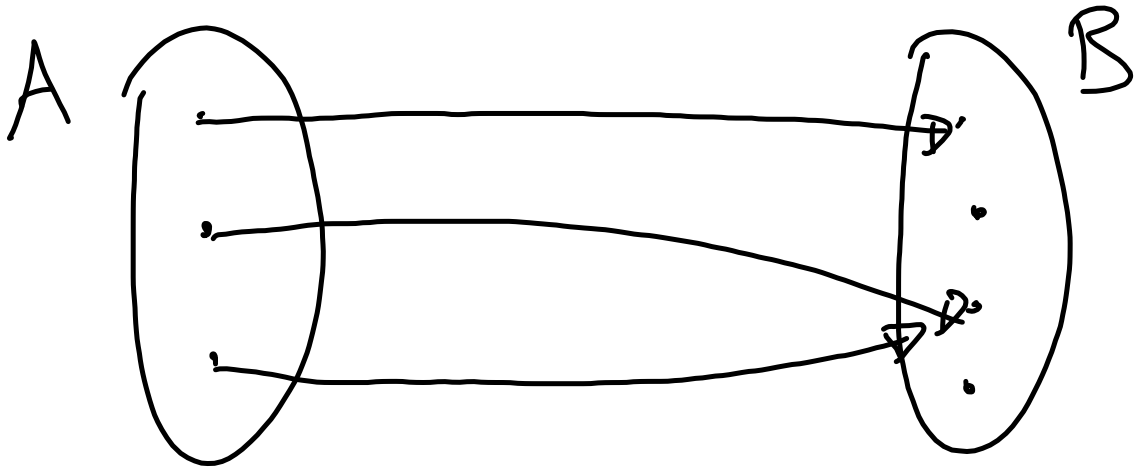
f mette in corrispond.

ogni elemento di A

con uno e un solo
elemento di B .



non è una funzione
 → corrisponde a due elementi



è una funzione

Grafico di f

$$\text{graph}(f) = \{ (a, b) \in A \times B \\ \text{t.c. } b = f(a) \}$$

Es. : $A, B = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

$$(3, 6) \in \text{graph}(f)$$

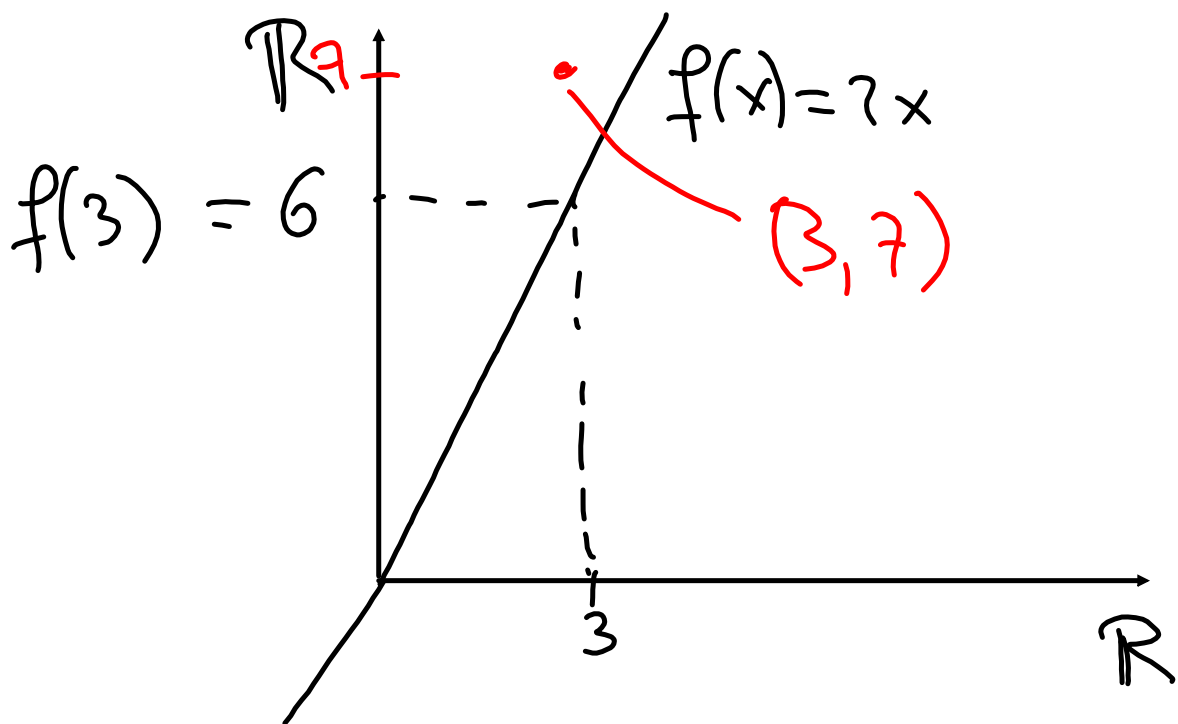
$$6 = f(3) = 2 \cdot 3$$

$$(3, 7) \notin \text{graph}(f)$$

$$7 \neq f(3) = 6$$

$$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$$
$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

piano Euclideo



$$\underline{\text{Def:}} \quad f: A \rightarrow B$$

$$D \subset A$$

$$f(D) = \{f(a) : a \in D\}$$

si dice immagine
di D attraverso f

$$f(D) \subset B$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

$$D = [1, 3]$$

$$\underline{f(D) = [1, 9]}$$

$$\text{Imm}(f) = f(A)$$

Immagine di f

$$\underline{\text{Es:}} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\text{Imm}(f) = [0, +\infty)$$

Def: $f: A \rightarrow B$

si dice iniettiva

se $\forall a_1, a_2 \in A$ con

$a_1 \neq a_2$ risulta

$$f(a_1) \neq f(a_2)$$

Es: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

$$a_1 = -3, a_2 = 3$$

$$f(a_1) = 9 = f(a_2)$$

non è iniettiva

$$g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2$$

g è iniettiva

Def: $f: A \rightarrow B$

si dice surgettiva

se $\forall b \in B \exists a \in A$

t.c. $f(a) = b$

Es: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

non è surgettiva

$$b = -4$$

$$\nexists a \in \mathbb{R} : a^2 = -4$$

Oss: $f: A \rightarrow B$

è surgettiva se e
solo se

$$\text{Imm}(f) = B$$

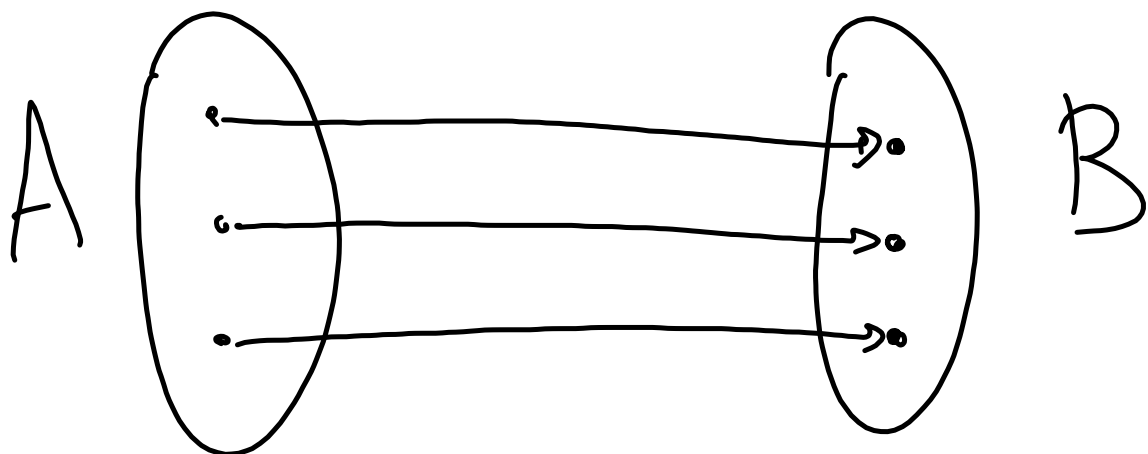
Es : $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

$$f(x) = x^2$$

è surgettiva.

Def : $f: A \rightarrow B$

se e f è sia
iniettiva che surgettiva
si dice biunivoca
o invertibile.



Posso costruire
la funzione inversa

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{se e solo se}$$
$$\text{se } f(a) = b$$

esiste almeno un $a \in A$
perché f è surgettiva
ne esiste solo uno
perché f è iniettiva

$$E_{15} : f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

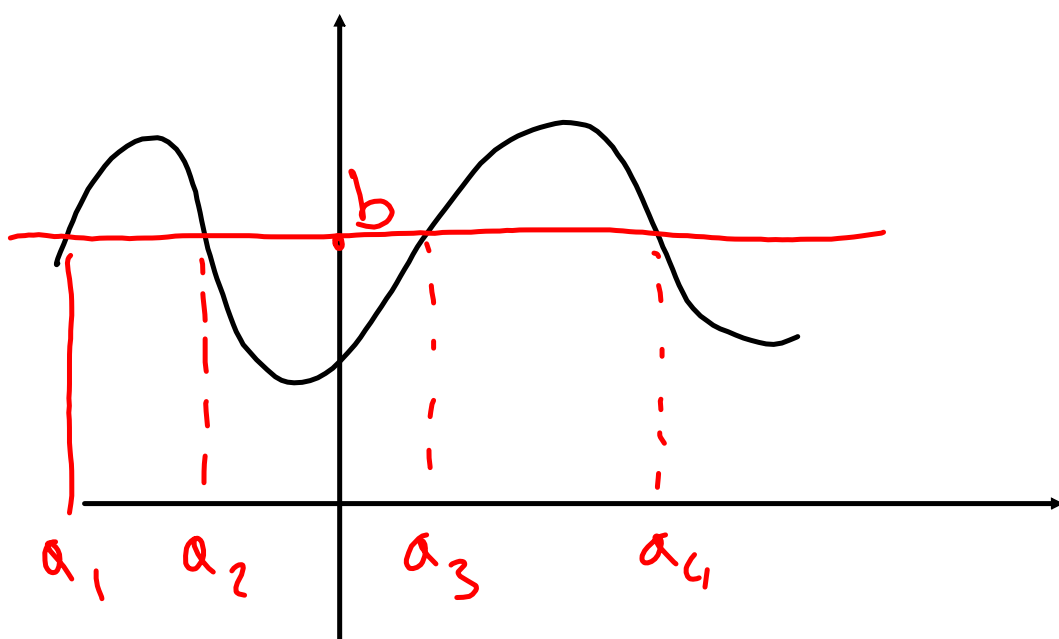
è invertibile.

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \text{ sempre}$$



$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_4) = b$$

f non \bar{e} iniettiva

Trovare l'inversa.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

scrivo

$$y = 3x + 2$$

risolvo in x

$$y - 2 = 3x$$

$$\frac{y - 2}{3} = x$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 2}{3}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x + 2) =$$

$$\frac{(3x + 2) - 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id} = \text{identità}$$

$$\text{Id}: A \rightarrow A$$

$$\text{Id}(x) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Funzioni monotone

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$

Se $\forall x_1, x_2 \in A$ con
 $x_1 < x_2$ risulta

1) $f(x_1) < f(x_2)$

f si dice strettamente
crescente

2) $f(x_1) \leq f(x_2)$ f si dice
debolmente crescente

3) $f(x_1) > f(x_2)$

strettamente decrescente

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$

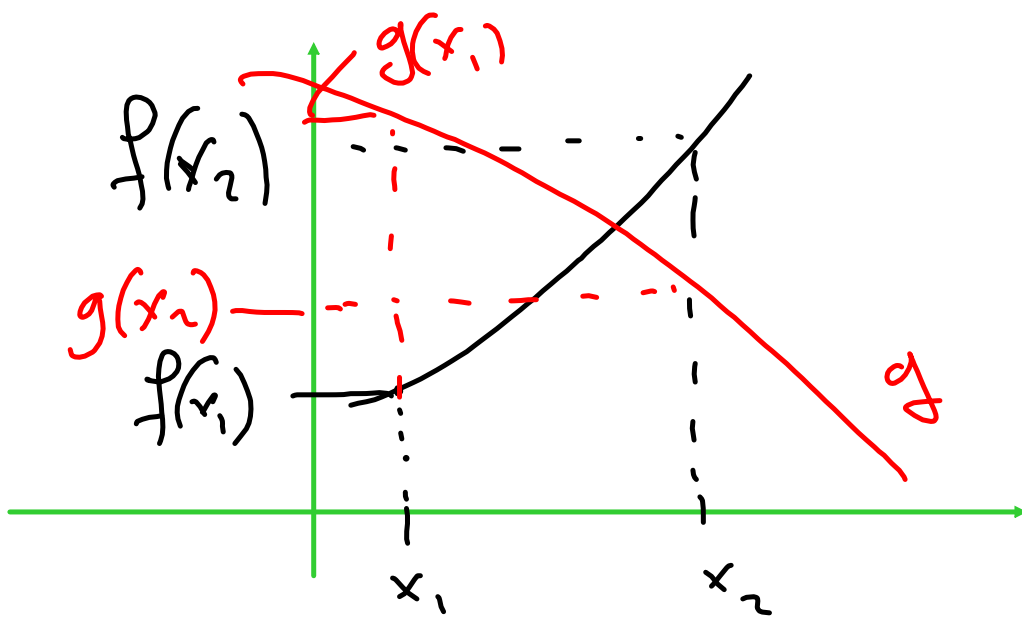
debolmente decrescente

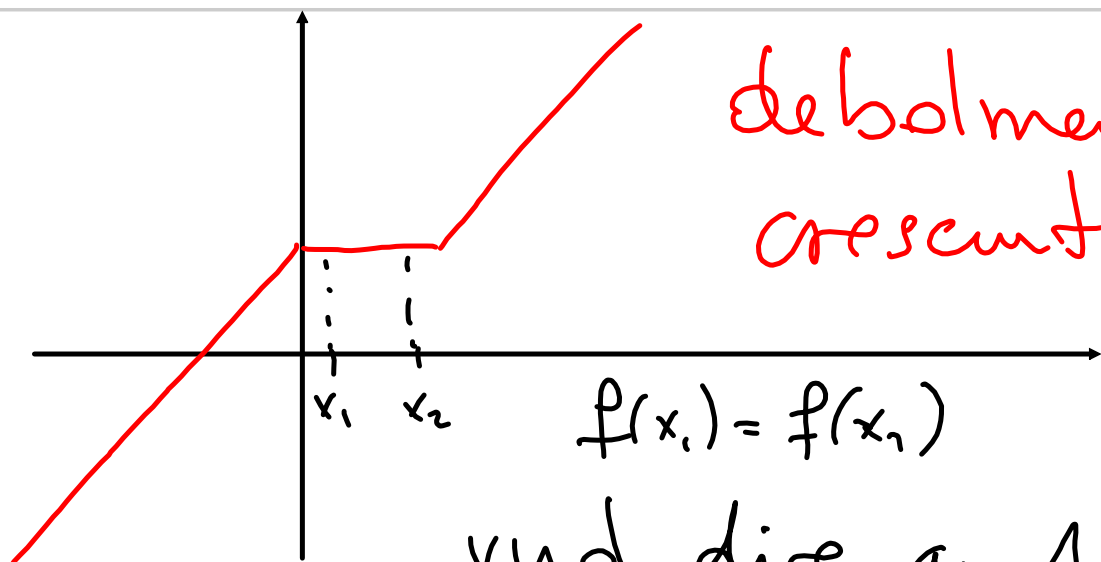
Se si verificano 1) o 3)

f si dice strettamente
monotona

Se si verificano 2) o 4)

debolmente monotona





debolmente
crescente.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

und dies auch

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

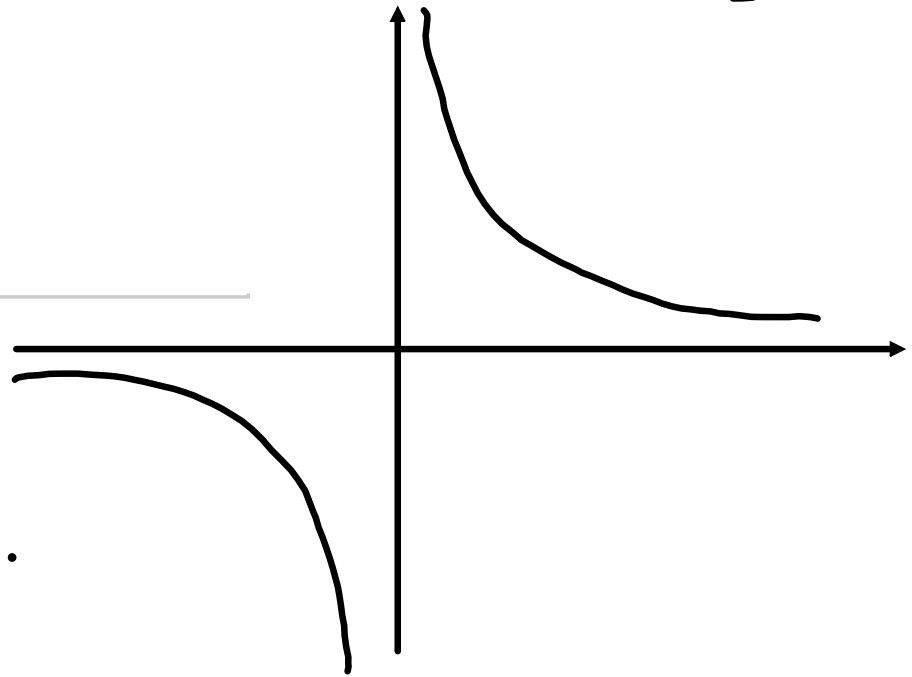
$$\underline{E}_s : f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

f è

strett. decresc.
in $(-\infty, 0)$

f è strett. obcresc. in $(0, +\infty)$



f è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

No in fatti

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3 \quad x_1 < x_2$$

$$f(x_1) = \frac{1}{-1} = -1 \quad f(x_2) = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Composizione di funzioni monotone.

Prop: $A, B, C \subset \mathbb{R}$

$f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$

Allora

1) Se f è crescente e g
è crescente $\Rightarrow g \circ f$ è cresc.

2) Se f è crescente e g
è decrescente $\Rightarrow g \circ f$ è decr.
(e viceversa)

3) Se f è decrescente e
 g è decrescente $\Rightarrow g \circ f$ è cresc.