Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A-B

A.A. 2018-2019

E.Chiodaroli, C.Grisanti, V.M. Tortorelli

IV settimana, 8-14 ottobre 2018: quarto foglio di esercizi

Defnzioni di Parte principale di infiniti ed infinitesimi

DEFINIZIONE 1.1 se $p \in \mathbf{R}$, data una funzione f, reale di variabile reale, definita in un intorno di p, salvo al più il punto p stesso, si dice

parte principale di f per $x \to p$ [rispettivamente per $x \to p^{\pm}$]

i- un multiplo reale non nullo di una funzione potenza di $x - p$, cioè: una funzione $m(x)$ del tipo

$$a(x-p)^z,\ a \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\},\ z \in \mathbf{Z} \text{ ovvero } \left(a(x-p),\ a(x-p)^2, \dots \frac{a}{x-p},\ \frac{a}{(x-p)^2} \dots \right)$$

ii- per cui
$$\frac{f(x)}{a(x-p)^z} \to 1,\ x \to p \qquad \text{[rispettivamente } x \to p^{\pm}\text{].}$$

in altri termini $f(x) = a(x-p)^z + o\left((x-p)^z\right),\ x \to p.$

DEFINIZIONE 1.2 data una funzione f, reale di variabile reale, definita su una semiretta illimitata superiormente [rispettivamente: illimitata inferiormente]

parte principale di f per $x \to +\infty$ [rispettivamente per $x \to -\infty$]

i- un multiplo reale non nullo di una funzione potenza di x, cioè: una funzione $m(x)$ del tipo

$$ax^z,\ a \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\},\ z \in \mathbf{Z}\ (ax,\ ax^2, \dots \frac{a}{x},\ \frac{a}{x^2} \dots$$

ii- per cui
$$\frac{f(x)}{ax^z} \to 1,\ x \to +\infty \qquad \text{[rispettivamente } x \to -\infty\text{].}$$

in altri termini $f(x) = ax^z + o\left(x^z\right),\ x \to +\infty.$

Osservazione 1: - se una funzione ha parte principale questa è univocamente determinata;
- se una funzione ha parte principale: ha limite finito non nullo se $z = 0$, altrimenti è infinitesima o tende ad un infinito con segno.

Osservazione 2: non è detto che la parte principale esista, *e.g.*:
$f(x) = \log x$ non ha parte principale né per $x \to 0^+$, nè per $x \to +\infty$.

Osservazione 3: le parti principali cambiano cambiando il punto limite p, *e.g.*:
- $f(x) = x + x^2$ ha parte principale x per $x \to 0$, ed ha parte principale x^2 per $x \to +\infty$;
- $f(x) = \dfrac{x}{3x^4+2}$ ha parte principale $\dfrac{x}{2}$ per $x \to 0$, ed ha parte principale $\dfrac{1}{3x^3}$ per $x \to +\infty$.