Logica per la Programmazione

Lezione 7

- Semantica della Logica del Primo Ordine
  - Interpretazioni
  - Formalizzazione

Interpretazione e Semantica

- Come in Calcolo Proposizionale la semantica di una formula chiusa di LPO si determina rispetto ad una **interpretazione**
- Una **interpretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
  - Il **dominio** di interesse (un insieme)
  - A quali **elementi** del dominio corrispondono i simboli di costante in $\mathcal{C}$
  - A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i simboli di funzione in $\mathcal{F}$
  - A quali **proprietà** o **relazioni** corrispondono i simboli di predicato in $\mathcal{P}$
- Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore di verità della formula complessiva
- Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

Esempio: Semantica di Formula dipende da Interpretazione

- Consideriamo la formula chiusa:

$$(\forall x. p(x) \vee q(x))$$

- Intepretazione 1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa "essere maschio"
  - Il predicato q significa "essere femmina"

  La formula è vera
- Intepretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa "essere numero primo"
  - Il predicato q significa "essere numero pari"

  La formula è falsa

Interpretazione: Definizione Formale

Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissato un alfabeto $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, una **intepretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- Un insieme $\mathcal{D}$, detto dominio dell'intepretazione
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, rappresentato da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$. Ovvero

$$\alpha(f) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$$

  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da $\alpha(p)$
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato** n**-ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) : \mathcal{D}^n \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (1)

- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la definizione formale della semantica
- Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
  - un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ e un'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - una formula del primo ordine che, per l'interpretazione $\mathcal{I}$, sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (2)

Dato un enunciato **E**, per identificare l'alfabeto $\mathcal{A}$ e l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$

- individuiamo il **dominio** $\mathcal{D}$ di cui parla l'enunciato
- per ogni individuo $d \in \mathcal{D}$ menzionato in **E**, introduciamo un simbolo di **costante** $c \in \mathcal{C}$ e fissiamo $\alpha(c) = d$
- per ogni operatore **op** menzionato in **E** che applicato a elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un individuo di $\mathcal{D}$, introduciamo un simbolo di **funzione** $f \in \mathcal{F}$ e fissiamo $\alpha(f) = \mathbf{op}$
- per ogni proprietà di individui o relazione tra individui **R** menzionata in **E**, introduciamo un simbolo di **predicato** $p \in \mathcal{P}$ e fissiamo $\alpha(p) = \mathbf{R}$

Formalizzazione di Enunciati: Esempio

"Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"

- Dominio: numeri naturali: $\mathbb{N}$
- Elementi del dominio menzionati: "due"
  - Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in \mathcal{C}$ con $\alpha(2) = \underline{\mathbf{2}} \in \mathbb{N}$
- Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - "n è pari": introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari, **F** altrimenti
  - "n è primo": introduciamo **primo** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{primo})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è primo, **F** altrimenti
  - "n è maggiore di m": introduciamo $> \in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(>)(n, m) = \mathbf{T}$ se n è maggiore di m, **F** altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.pari(x) \land x > 2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo
- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

Alfabeto ed Interpretazione

Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti: le persone Alberto, Bruno e Carlo. Introduciamo le costanti $A, B, C \in \mathcal{C}$ tali che $\alpha(A) =$"la persona Alberto", $\alpha(B) =$"la persona Bruno" e $\alpha(C) =$"la persona Carlo"
- Operatori sul dominio menzionati: nessun simbolo di funzione
- Proprietà o relazioni tra persone:
  - introduciamo un simbolo di predicato $vaCinema \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(vaCinema)(d) = \mathbf{T}$ se d va al cinema, $\mathbf{F}$ altrimenti
  - introduciamo un simbolo di predicato $segueLPP \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(segueLPP)(d) = \mathbf{T}$ se d segue LPP, $\mathbf{F}$ altrimenti
  - introduciamo un simbolo di predicato $= \in \mathcal{P}$ con arietà 2 con il significato standard

Formalizzazione di Enunciati: Formule

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo:

$$\neg segueLPP(A) \wedge (vaCinema(A) \wedge (vaCinema(B) \vee vaCinema(C)))$$

- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x.segueLPP(x) \Rightarrow vaCinema(x))$$

- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema:
  $(\exists x.segueLPP(x) \wedge \neg vaCinema(x) \wedge$
  $(\forall y.segueLPP(y) \wedge \neg(x = y) \Rightarrow vaCinema(y))$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

Formalizzare l'enunciato: "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti, operatori sul dominio menzionati: nessuno
- Proprietà o relazioni tra persone:
  - "d_1 e d_2 sono parenti": introduciamo *parenti* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{parenti})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 e d_2 sono parenti, $\mathbf{F}$ altrimenti
  - "d_1 è antenato di d_2": introduciamo *antenato* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{antenato})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 è antenato di d_2, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.(\forall y.(\exists z.\mathit{antenato}(z, x) \wedge \mathit{antenato}(z, y)) \Rightarrow \mathit{parenti}(x, y)))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (2)

"Se un numero naturale è pari allora il suo successore è dispari"

- Dominio: numeri naturali: $\mathbb{N}$
- Operatori sul dominio menzionati: "successore"
  - Introduciamo il simbolo **succ** $\in \mathcal{F}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{succ})(n) = n + 1$
- Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - "n è pari": introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ come prima
  - "n è dispari": introduciamo **dispari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{dispari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(succ(x)))$$