

Logica per la Programmazione

Lezione 8

- ▶ Semantica della Logica del Primo Ordine
 - ▶ Semantica dei termini
 - ▶ Semantica delle formule
 - ▶ Esempi

Interpretazione: Richiamo

Dato un alfabeto \mathcal{V} , \mathcal{C} , \mathcal{F} e \mathcal{P} , una **intepretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- ▶ Un insieme \mathcal{D} , detto **dominio dell'intepretazione**
- ▶ Una **funzione di interpretazione** α che associa:
 - ▶ ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio \mathcal{D} , rappresentato da $\alpha(c)$
 - ▶ ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n -upla di elementi di \mathcal{D} restituisce un elemento di \mathcal{D} . Ovvero

$$\alpha(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

- ▶ ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da $\alpha(p)$
- ▶ ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato n -ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n -upla di elementi di \mathcal{D} restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Esempio di Semantica: Alfabeto e Interpretazioni

Sia dato l'alfabeto: $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ $\mathcal{F} = \{\}$ $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}(_)\}$ $\mathcal{V} = \{x, y\}$

Consideriamo le seguenti interpretazioni:

- ▶ Interpretazione $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{D}_1, \alpha_1)$
 - ▶ **Dominio:** le città italiane $[\mathcal{D}_1 = \{c \mid c \text{ è una città italiana} \}]$
 - ▶ $\alpha_1(\mathbf{a}) = \mathbf{Milano}$, $\alpha_1(\mathbf{b}) = \mathbf{Roma}$, $\alpha_1(\mathbf{c}) = \mathbf{Pontedera}$
 - ▶ $\alpha_1(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ se x è capoluogo di provincia, \mathbf{F} altrimenti

- ▶ Interpretazione $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{D}_2, \alpha_2)$
 - ▶ **Dominio:** l'insieme di numeri naturali $\{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}$ $[\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}]$
 - ▶ $\alpha_2(\mathbf{a}) = \mathbf{5}$, $\alpha_2(\mathbf{b}) = \mathbf{10}$, $\alpha_2(\mathbf{c}) = \mathbf{15}$
 - ▶ $\alpha_2(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ se x è multiplo di $\mathbf{5}$, \mathbf{F} altrimenti

- ▶ Interpretazione $\mathcal{I}_3 = (\mathcal{D}_3, \alpha_3)$
 - ▶ come \mathcal{I}_2 , ma **Dominio:** l'insieme dei numeri naturali $[\mathcal{D}_3 = \mathbb{N}]$

Esempio di Semantica: Valore di Verità di Formule

	Dominio	$\alpha(\mathbf{a})$	$\alpha(\mathbf{b})$	$\alpha(\mathbf{c})$	$\alpha(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ sse
\mathcal{I}_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
\mathcal{I}_2	{5, 10, 15}	5	10	15	x multiplo di 5
\mathcal{I}_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	Valore in \mathcal{I}_1	Valore in \mathcal{I}_2	Valore in \mathcal{I}_3
$p(a)$	T	T	T
$p(b)$	T	T	T
$p(c)$	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\neg p(y))$	T	F	T

La Semantica della Logica del Primo Ordine

- ▶ Sia fissato un linguaggio \mathcal{L} del primo ordine con alfabeto $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$.
- ▶ Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e una formula ϕ su \mathcal{L} , vogliamo definire in modo formale la **semantica** di ϕ in \mathcal{I} , cioè il suo valore di verità
- ▶ Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in ϕ
 - ▶ I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
 - ▶ Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.

Quindi il significato dei simboli in $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ è determinato dall'interpretazione (dalla funzione α), mentre il significato dei simboli in \mathcal{V} è determinato da un assegnamento.

Il motivo di questa differenza sarà chiarito nelle regole per la semantica.

Assegnamenti

- ▶ Un **assegnamento** ρ è una funzione che associa ad ogni variabile un elemento del dominio: $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$
- ▶ Possiamo rappresentare un assegnamento anche come un insieme di coppie: per esempio se $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$, scriviamo

$$\rho = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 1\}$$

- ▶ Se ρ è un assegnamento, con $\rho[d/x]$ denotiamo l'assegnamento che associa alla variabile x il valore d , e sulle altre variabili si comporta come ρ . Quindi

$$\rho[d/x](y) = \begin{cases} d & \text{se } x = y \\ \rho(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ Esempio: sia ρ come definito sopra, e $\rho_1 = \rho[15/z]$, allora

$$\rho_1 = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 15\}$$

Semantica dei Termini

- ▶ Ricordiamo la definizione di termine:
 - ▶ Ogni costante in \mathcal{C} è un termine e ogni variabile in \mathcal{V} è un termine
 - ▶ Se f è un simbolo di funzione in \mathcal{F} con arietà n e t_1, \dots, t_n sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

- ▶ Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$, la **semantica di un termine** t , in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta per **induzione strutturale** con le tre regole:
 - ▶ (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
 - ▶ (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
 - ▶ (R3) se $t = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(\mathbf{f}))(d_1, \dots, d_n)$

- ▶ Quindi la semantica di un termine è un elemento del dominio. Inoltre se il termine non contiene variabili, la sua semantica non dipende dall'assegnamento (la regola (R0) non verrà mai usata).

Un esempio di Interpretazione

- ▶ Il linguaggio \mathcal{L}
 - ▶ $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}\}$
 - ▶ $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$ con arietà 1
 - ▶ $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}\}$ con arietà 2
- ▶ L'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
 - ▶ $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
 - ▶ $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
 - ▶ $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
 - ▶ $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali, per esempio $\alpha(\mathbf{p})(7, 5) = \mathbf{T}$, mentre $\alpha(\mathbf{p})(11, 18) = \mathbf{F}$
- ▶ L'assegnamento $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$
- ▶ Consideriamo i termini $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))$ e $\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$: la loro semantica sarà:
 - ▶ $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = 3$
 - ▶ $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \rho(x) + 1 + 1 = 4$

Esempio di semantica di termini

Ricordiamo che $\alpha(\mathbf{a}) = 0$, $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$, e $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$

$$\begin{aligned}
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) + 1 + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{a})) + 2 &= \\
 \alpha(\mathbf{a}) + 1 + 2 &= 0 + 3 = 3
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(x))) &= \\
 \alpha_\rho(\mathbf{f}(x)) + 1 &= \\
 \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(x)) + 1 &= \\
 \alpha_\rho(x) + 1 + 1 &= \\
 \rho(x) + 2 &= 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

Semantica delle Formule

Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$, la **semantica di una formula** ϕ , denotata $\mathcal{I}_\rho(\phi)$, è definita per induzione strutturale dalle regole che seguono.

Ricordiamo che se $p \in \mathcal{P}$, t_1, \dots, t_n sono termini, allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula atomica**

- ▶ (S1) se $\phi = \mathbf{p}(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = (\alpha(\mathbf{p})(d_1, \dots, d_n))$$
 - ▶ caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione:

$$\mathcal{I}_\rho(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})$$
- ▶ (S2) - [questa regola è obsoleta]

Semantica dei Connettivi Logici (per Induzione Strutturale)

▶ (S3)

$$\mathcal{I}_\rho(\neg P) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S4)

$$\mathcal{I}_\rho(P \wedge Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S5)

$$\mathcal{I}_\rho(P \vee Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S6)

$$\mathcal{I}_\rho(P \Rightarrow Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

▶ (S7)

$$\mathcal{I}_\rho(P \equiv Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathcal{I}_\rho(Q) \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Semantica dei Quantificatori

► (S8)

$$\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per qualunque } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

► (S9)

$$\mathcal{I}_\rho((\exists x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per almeno un } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Nota:** l'uso dell'assegnamento ρ è necessario per le regole dei quantificatori (S8) e (S9), infatti la sottoformula P è tipicamente una formula aperta.

Esercizio 1

Mostrare che la formula

$$\Phi_1 = (\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x, y)))$$

è vera nell'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, dove $\mathbf{D} = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x, y) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_1)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Esercizio 2

Calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi_2 = (\forall x. P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$$

nell'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, dove $\mathbf{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = c \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \\ \mathbf{F} & \text{se } x = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \end{cases}$$

Calcolare cioè il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_2)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.