

Logica per la Programmazione

Lezione 9

- ▶ Modelli, Formule Valide, Conseguenza Logica
- ▶ Proof Systems
- ▶ Regole di inferenza per Calcolo Proposizionale con Premesse
- ▶ Teorema di Deduzione

Logica del Primo Ordine: riassunto

- ▶ **Sintassi**: grammatica libera da contesto (BNF), parametrica rispetto a un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$
- ▶ **Interpretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$: fissa il significato dei simboli dell'alfabeto su un opportuno dominio
- ▶ **Semantica**: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed una formula ϕ , le regole (S1)-(S9) permettono di calcolare in **modo induttivo** il valore di verità di ϕ in \mathcal{I} rispetto a un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$, ovvero $\mathcal{I}_\rho(\phi)$.

Modelli, Formule Valide, Soddisfacibili e Insoddisfacibili

- ▶ Sia \mathcal{I} un'interpretazione e ϕ una formula **chiusa**. Se ϕ è **vera** in \mathcal{I} , diciamo che \mathcal{I} è un **modello** di ϕ e scriviamo:

$$\mathcal{I} \models \phi$$

- ▶ Se Γ ("Gamma") è un insieme di formule, con

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

intendiamo che \mathcal{I} è un **modello** di tutte le formule in Γ

- ▶ Se una formula ϕ è **vera in tutte le interpretazioni** si dice che è **valida** (estensione del concetto di tautologia) e scriviamo

$$\models \phi$$

- ▶ Se una formula ϕ è vera in almeno una interpretazione si dice che è **soddisfacibile** altrimenti è **insoddisfacibile**

Esempi

- ▶ Formula **soddisfacibile**: $p(a)$
 - ▶ Basta trovare un'interpretazione che la renda vera. Per esempio:
 $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, con $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ e
 - ▶ $\alpha(\mathbf{a}) = 44$
 - ▶ $\alpha(\mathbf{p})(\mathbf{x}) = \mathbf{T}$ se \mathbf{x} è pari, \mathbf{F} altrimenti
- ▶ Formula **valida** (corrispondono alle **tautologie**):

$$(\forall x. p(x) \vee \neg p(x))$$

- ▶ Formula **insoddisfacibile** (corrispondono alle **contraddizioni**):

$$(\exists x. p(x) \wedge \neg p(x))$$

Conseguenza Logica

- ▶ Il concetto di conseguenza logica consente di **parametrizzare la validità** di una formula ϕ rispetto a un insieme di formule Γ
- ▶ Diciamo che ϕ è una **conseguenza logica** di Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \phi$$

se e soltanto se ϕ è **vera in tutti i modelli di Γ** .

In altre parole, se un'interpretazione \mathcal{I} rende vere tutte le formule in Γ (ovvero $\mathcal{I} \models \Gamma$), allora \mathcal{I} rende vera anche ϕ (ovvero $\mathcal{I} \models \phi$)

- ▶ Caso Particolare: $\emptyset \models \phi$ se e solo se $\models \phi$, cioè se ϕ è valida

I Sistemi di Dimostrazione (Proof Systems)

- ▶ Dato un insieme di formule Δ (“Delta”), un **sistema di dimostrazione** (o **proof system**) per Δ è un insieme di **Regole di Inferenza**
- ▶ Ciascuna **Regola di Inferenza** consente di derivare una formula (**conseguenza**) da un insieme di formule dette le (**premesse**)
- ▶ Una **Regola di Inferenza** ha la forma

$$\frac{\delta_1, \dots, \delta_k}{\delta}$$

dove $\delta_1, \dots, \delta_k$ sono le premesse e δ è la conseguenza, e sono tutte formule in Δ

- ▶ Se $k = 0$, la regola è chiamata anche un **assioma**.

Dimostrazioni

- ▶ Una **dimostrazione** di una formula ϕ a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza di formule ϕ_1, \dots, ϕ_n tale che
 - ▶ Ogni formula ϕ_i è un elemento di Γ oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire dalle premesse Γ e $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$
 - ▶ ϕ_n coincide con ϕ
- ▶ Scriviamo

$$\Gamma \vdash \phi$$

se esiste una dimostrazione di ϕ a partire da Γ

Correttezza e Completezza dei Proof Systems

- ▶ Un proof system è **corretto** se quando **esiste una dimostrazione** di una formula ϕ da un insieme di premesse Γ allora ϕ è **una conseguenza logica** di Γ , cioè

$$\text{se } \Gamma \vdash \phi \text{ allora } \Gamma \models \phi$$

- ▶ Un proof system è **completo** se quando una formula ϕ è **una conseguenza logica** di un insieme di premesse Γ , allora **esiste una dimostrazione** di ϕ da Γ , cioè

$$\text{se } \Gamma \models \phi \text{ allora } \Gamma \vdash \phi$$

- ▶ Quindi completezza e correttezza mettono in relazione un concetto puramente sintattico ($\Gamma \vdash \phi$) con uno semantico ($\Gamma \models \phi$)
- ▶ Non ha senso considerare proof system non corretti!!

Calcolo Proporzionale come Proof System

- ▶ Il **Calcolo Proporzionale**, come lo abbiamo presentato, è un **proof system** sull'insieme delle proposizioni
- ▶ Le regole di inferenza sono
 - ▶ il **principio di sostituzione per l'equivalenza**
 - ▶ **i principi di sostituzione per l'implicazione**
- ▶ Il **Calcolo Proporzionale** è corretto ed anche completo, ma non vediamo le dimostrazioni

CP come Proof System: dimostrazione del Complemento

- ▶ Quindi: una **dimostrazione** di ϕ a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza $\phi_1, \dots, \phi_n = \phi$ dove $\phi_i \in \Gamma$ oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire da Γ e $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$
- ▶ Vediamo con un esempio che le nostre dimostrazioni sono solo una notazione più compatta della definizione generale
- ▶ Sia Γ l'insieme delle leggi già dimostrate e **(Sost- \equiv)** il *Principio di sostituzione dell'equivalenza*.

Dimostrazione di $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Complemento)

$$\begin{array}{ll}
 p \vee (\neg p \wedge q) & \Gamma \ni \phi_1 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee (\neg p \wedge q) \\
 \equiv \{(Distr.)\} & \{\text{Regola: (Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_1 \text{ e (Distr.)}\} \\
 (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) & \phi_2 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{(p \vee \neg p)} \wedge (p \vee q) \\
 \equiv \{(\text{Terzo Escluso})\} & \{(\text{Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_2 \text{ e (Terzo Escluso)}\} \\
 \mathbf{T} \wedge (p \vee q) & \phi_3 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{\mathbf{T}} \wedge (p \vee q) \\
 \equiv \{(\text{Unità})\} & \{(\text{Sost-}\equiv\text{)}, \text{ applicata a } \phi_3 \text{ e (Unità)}\} \\
 (p \vee q) & \phi_4 = p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q)
 \end{array}$$

Cosa vedremo per la Logica del Primo Ordine

- ▶ Rivedremo le **Regole di Inferenza** del Calcolo Proporzionale in forma **più generale** (come proof system **con premesse**)
 - ▶ Per i connettivi logici useremo le leggi del CP
- ▶ Estenderemo il proof system alla Logica del Primo Ordine
 - ▶ Anche per il primo ordine ci limiteremo alle regole di inferenza che consentono di dimostrare la validità di formule del tipo:
 - ▶ $\phi \equiv \psi$
 - ▶ $\phi \Rightarrow \psi$
 - ▶ Introdurremo **nuove leggi** e **nuove regole di inferenza** per i quantificatori
 - ▶ Le regole di inferenza che introdurremo formano un proof system **corretto** per LPO
 - ▶ per LPO esistono diversi proof systems **corretti e completi** (come la *deduzione naturale* e il *calcolo dei sequenti*)

Leggi Generali e Ipotesi (1)

- ▶ Anche nella logica del primo ordine useremo come **leggi generali formule valide** (corrispondenti alle tautologie nel calcolo proposizionale)
- ▶ L'uso di formule valide garantisce la validità del risultato. Vediamo perché:
 - ▶ Sia Γ un insieme di **formule valide** e ϕ una formula dimostrabile a partire da Γ :

$$\Gamma \vdash \phi$$

- ▶ se $\Gamma \vdash \phi$ allora per la correttezza di \vdash , $\Gamma \models \phi$, ovvero ϕ è vera in ogni modello \mathcal{I} di Γ
- ▶ poiché ogni interpretazione \mathcal{I} è modello di Γ , ϕ è vera in ogni interpretazione \mathcal{I}
- ▶ quindi è **valida**, ovvero

$$\models \phi$$

Leggi Generali e Ipotesi (2)

- ▶ Se in Γ , oltre alle **formule valide** abbiamo anche altre formule (**ipotesi**) allora la dimostrazione

$$\Gamma \vdash \phi$$

non garantisce la validità di ϕ , ma il fatto che ϕ sia una **conseguenza logica** delle ipotesi

- ▶ ovvero se $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove Γ_1 sono formule valide e Γ_2 sono **ipotesi**, allora la dimostrazione garantisce che

$$\Gamma_2 \models \phi$$

Generalizzazione del Principio di Sostituzione per \equiv

$$\frac{(P \equiv Q) \in \Gamma}{\Gamma \vdash R \equiv R[Q/P]}$$

- ▶ Nota: La generalizzazione consiste nel far riferimento in modo esplicito ad un insieme di premesse Γ
- ▶ “Se P e Q sono **logicamente equivalenti** nelle premesse Γ , allora il fatto che R e $R[Q/P]$ sono equivalenti è dimostrabile da Γ ”

Generalizzazione dei Principi di Sostituzione per \Rightarrow

- ▶ Dobbiamo estendere il concetto di **occorrenza positiva** o **negativa** alle formule quantificate
 - ▶ P occorre **positivamente** in $(\forall x.P)$ ed in $(\exists x.P)$

▶

$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre } \text{positivamente} \text{ in } R}{\Gamma \vdash R \Rightarrow R[Q/P]}$$

▶

$$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre } \text{negativamente} \text{ in } R}{\Gamma \vdash R[Q/P] \Rightarrow R}$$

Esempi

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P \vee R) \wedge (\exists x. \neg P) \\
 \Rightarrow & \quad \{I_p : P \Rightarrow Q\} \\
 & (\forall x. Q \vee R) \wedge (\exists x. \neg P)
 \end{aligned}$$

Corretto perché la prima P occorre positivamente

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P \vee R) \wedge (\exists x. \neg P) \\
 \Rightarrow & \quad \{I_p : P \Rightarrow Q\} \\
 & (\forall x. Q \vee R) \wedge (\exists x. \neg Q)
 \end{aligned}$$

Sbagliato perché la seconda P occorre negativamente

Teorema di Deduzione

- ▶ Sappiamo dal CP che per dimostrare che $P \Rightarrow Q$ è una **tautologia**, basta dimostrare Q usando P come **ipotesi**
- ▶ Ora che abbiamo introdotto le premesse di una dimostrazione, possiamo giustificare questa tecnica con il **Teorema di Deduzione**:

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q$$

se e solo se

$$\Gamma, P \vdash Q$$

- ▶ Ovvero per dimostrare una implicazione $P \Rightarrow Q$ è possibile costruire una dimostrazione per Q usando sia le leggi generali (formule valide) che P come ipotesi