

Prop:  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$

derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$ ,  $f$

continua in  $I$

1) se  $f'(x) \leq 0$  in un intorno  
sinistro di  $x_0$  e  $f'(x) \geq 0$   
in un intorno destro di  $x_0$

allora  $x_0$  è punto di minimo locale.

2) Se  $f'(x) \geq 0$  in un intorno sinistro di  $x_0$  e  $f'(x) \leq 0$  in un intorno destro di  $x_0$   
 $\Rightarrow x_0$  è punto di massimo locale.

$$\text{Es: } f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

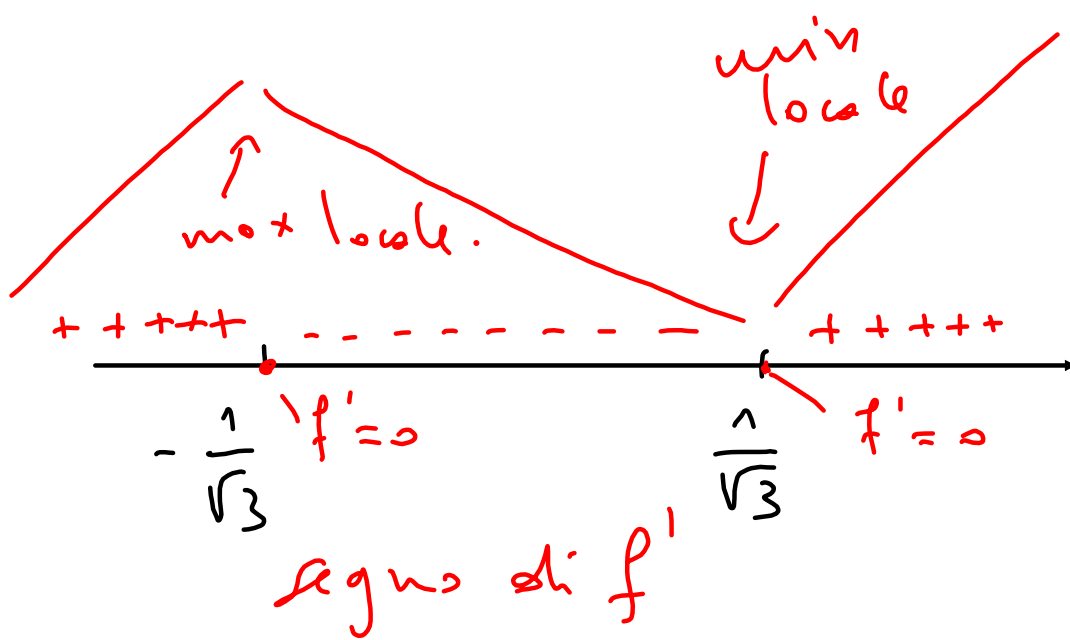
segno di  $f'$

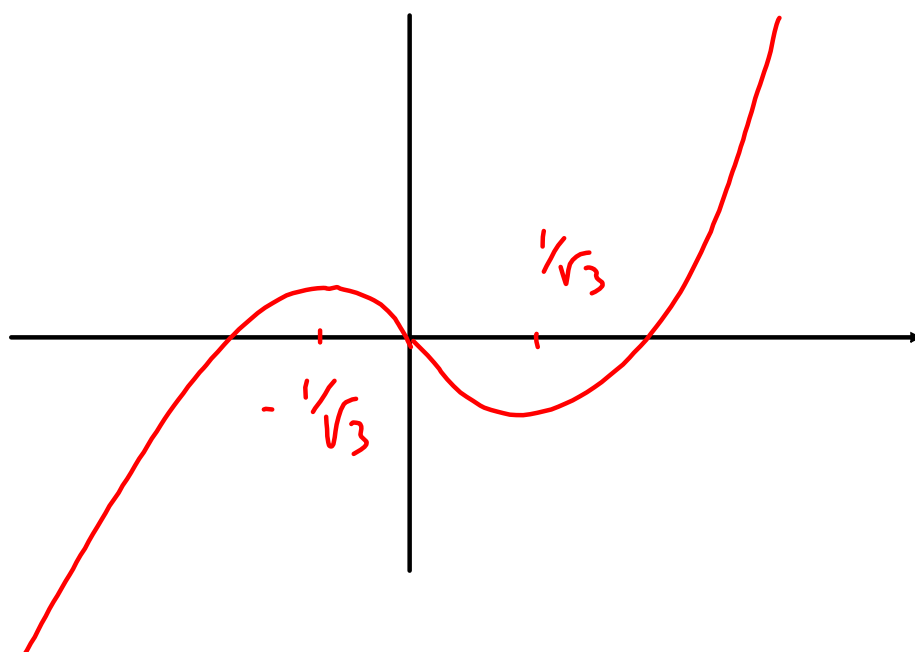
$$3x^2 - 1 \geq 0$$

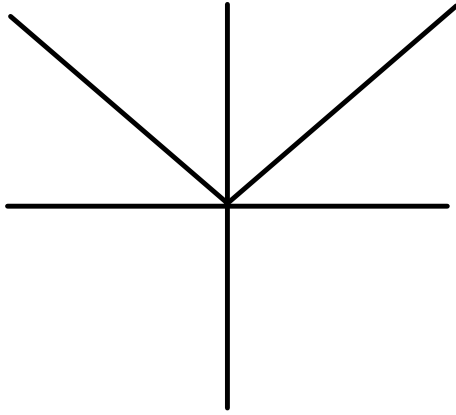
$$x^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$



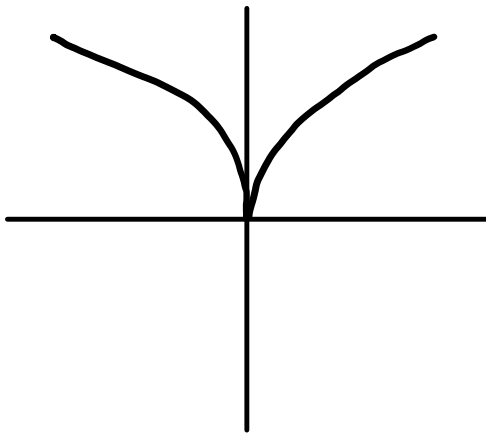




$$f(x) = |x|$$

$x_0 = 0$  punto di min

$$\nexists f'(0)$$



$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

$x_0 = 0$  punto di min

$$\nexists f'(0)$$

Teorema:  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{int}(A)$ ,  $f$  derivabile 2  
volte in  $x_0$ ,  $f'(x_0) = 0$ .

1) Se  $x_0$  è punto di minimo locale

$$\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

2) Se  $x_0$  è punto di massimo

$$\text{locale} \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$$

3) Se  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  è punto di minimo locale

4) Se  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  è punto di max locale.



$$\underline{\text{Ej}} : f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \\ f'(0) = 0 \quad f''(0) > 0 \quad f''(x) = 2$$

$\Rightarrow 0$  è di minimo locale.

$$f(x) = -x^2 \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2$$

$\Rightarrow 0$  è di max locale.

Se  $f''(x_0) = 0$  non potete  
dire niente

Es :  $f(x) = x^4$

$$g(x) = x^3$$

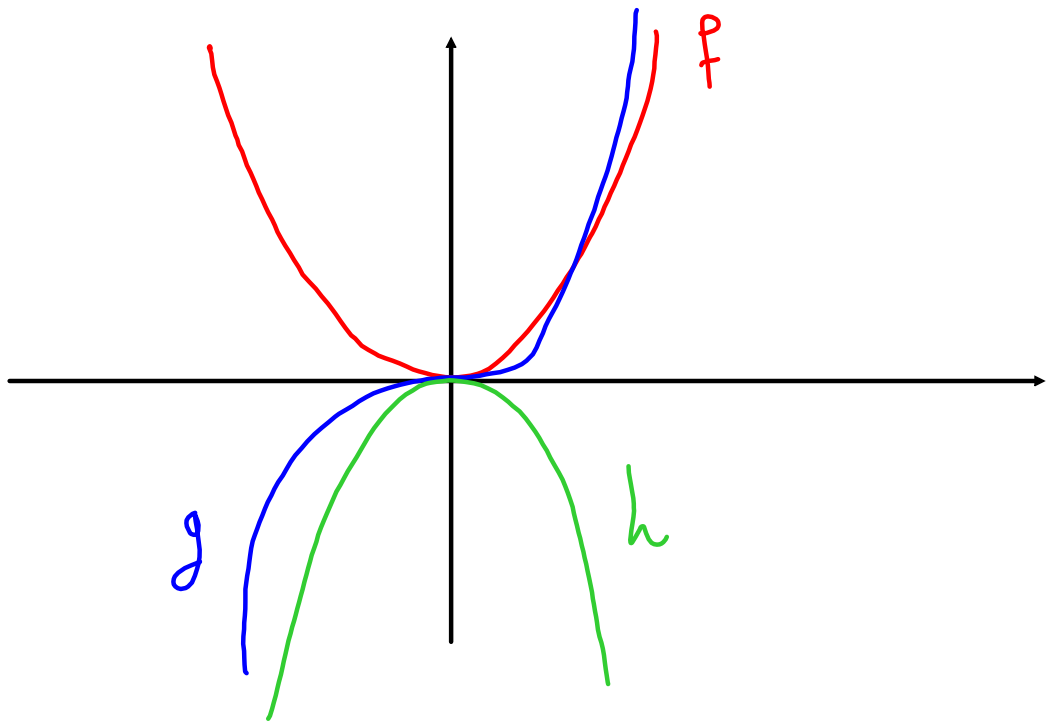
$$h(x) = -x^4$$

$$f' = 4x^3, \quad g' = 3x^2, \quad h' = -4x^3$$

$$f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$

$$f'' = 12x^2, \quad g'' = 6x, \quad h'' = -12x^2$$

$$f''(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad h''(0) = 0$$



## Teorema di de l'Hôpital

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$   $g, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $g, f$  derivabili in  $(a, b)$ . Se  
valgono le seguenti ipotesi

1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \uparrow \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$   
oppure

2)  $g'(x) \neq 0$  in un intorno  
destra di  $a$

$$3) \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Allora } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Valo anche per il  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\underline{\text{Es}}: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = 2 \cos x - 2 + x^2$$

$$g(x) = x^4$$

$$g' = 4x^3 \quad \text{non si annulla}$$

in un intorno di 0 (a parte in 0)

$$f' = -2 \sin x + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 7x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

applico de l'Hôpital di nuovo  
derivo num. e denomin.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital di nuovo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{24x} = \frac{1}{12}$$

applicando il teorema ottengo  
che il limite originale  
vale  $\frac{1}{12}$ .



$$\underline{Es} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

de l'Hôpital

$$\frac{f'}{g'} = \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

de l'Hôpital

$$\frac{e^x}{2} \rightarrow \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

Es: Verificate sempre  
l'ipotesi 1). In fatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

se non verificate l'ipotesi i)

e usate de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Es: Potrebbe esistere

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  ma non esistere

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (ipotesi 3).

$$\text{Es: } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$g'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{?}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1} = \text{?}$$

Cosa concludo?  
non vale l'ipotesi 3) quindi  
non posso applicare il  
teorema di de l'Hôpital

Se l'avessi applicato  
e avessi concluso che  
 $\neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  avrei  
sbagliato, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$$

Corollario: Se  $f$  è continua  
in  $x_0$  e derivabile in un  
intervallo di  $x_0$ , eccetto al  
più  $x_0$  e se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora  $\exists f'(x_0) = l$ .

Oss: Se  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$   
non potete concludere che  
 $\nexists f'(x_0)$ .

In fatti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



è derivabile in 0 ?

Calcolo  $f'(x)$  per  $x \neq 0$ .

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 + \cancel{\exists} = \cancel{\exists}.$$

non posso concludere che  
 $f$  non ha derivata in  $0$ .

In fatti

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0$$

$\Rightarrow f$  è derivabile in  $0$ .

$$\underline{Es} : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{e^{-1/0^+}}{0^+} = \frac{e^{-\infty}}{0^+} = \frac{0}{0^+}$$

de l'Hôpital

$$\frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{2x} = \frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

potete provare a scriverlo diversamente.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

applico di l'Hôpital.

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{x^{-2}}{e^{1/x}}$$

deriva  
sopra e  
sotto.

$$\frac{-2x^{-3}}{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})} =$$
$$= \frac{2x^{-1}}{e^{1/x}}$$

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} =$$
$$= -x^{-2}$$

moltiplico  
sopra e sotto  
per  $-x^2$

da l'Hôpital di nuovo

$$\frac{-2x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})} = \frac{2}{e^{1/x}}$$

$$\rightarrow \frac{2}{e^{1/0^+}} = \frac{2}{e^{+\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Def: dato  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

si chiama n fattoriale.

per convenzione

$$0! = 1$$



$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = (3!) \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

$$5! = (4!) \cdot 5 = 120$$

in generale

$$(n+1)! = n! (n+1).$$

$$(n+1)! = [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n] (n+1) = \\ = n! (n+1).$$

## Formula di Taylor

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tangente}} + \underbrace{a(x-x_0)}_{\text{resto}}$$

posso precisare meglio  
il resto?

## Formula di Taylor con resto di Peano

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  è derivabile  $n$ -volte in  $x_0$  e almeno  $n-1$ -volte in  $(a, b)$  allora  $\exists$  unico un polinomio di grado  $n$   $P_n(x)$  e una funzione resto  $R_n(x)$  con la proprietà

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$\text{e } R_n(x) = a((x-x_0)^n)$$

Il polinomio è di questa forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

$R_n(x)$  si dice resto di Peano  
e l'unica proprietà che ha è  
 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$  cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$