Resto di Lagrange

Se f è derivabile $n+1$ - volte in (a,b) tranne al più il punto x_0 dove basta che sia derivabile n - volte allora

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dove z è un punto compreso fra x e x_0.

Esempi: $\quad f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$\cancel{f^{(4)}(x) = \sin x}$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x \boxed{- \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

resto di Peano $R_3(x)$.

$$\sin x = x + \boxed{o(x)}$$

sono valide entrambe

infatti $-\frac{x^3}{6} + o(x^3) = o(x)$

infatti $\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{6} + o(x^2) = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \underbrace{\boxed{R_7(x)}}_{}$$

$o(x^7)$

passo migliorare

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + 0 \cdot \frac{x^8}{8!} + R_8(x)$$

$o(x^8)$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

avevamo visto che $\sin x = x + o(x)$

ma in realtà

$$\sin x = x + o\left(x^2\right)$$

$$\cos x = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right)}_{P_{2n}} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x, \; f''(x) = e^x$$

$$f(0) = 1, \; f'(0) = 1, \; f''(0) = 1 \quad \ldots$$

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right) + o(x^n)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

Es: $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Es:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$$

$$\frac{\overbrace{\cancel{x} + o(x^2)}^{\sin x} - \cancel{x}}{\underbrace{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x)}_{e^x} - \underbrace{\left[\cancel{x} + o(x)\right]}_{\log(1+x)} - \cancel{1}} = \frac{o(x^2)}{o(x)}$$

non mi dice niente.

$$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left[\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{x^3\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)}{x^2\left(1 + o(1)\right)}$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} \to 0$$

$$(\sin x)^2 - \sin(x^2) =$$

$t = x^2$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + o\left((x^2)^4\right)\right)$$

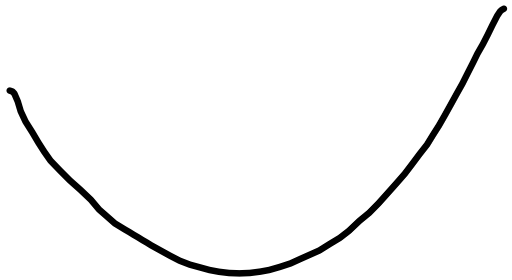
$$= \cancel{x^2} - 2\frac{x^4}{6} + o(x^5) - \left(\cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

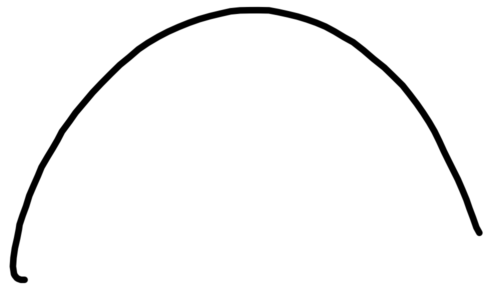
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3} x^4 + o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

Convessità



convessa



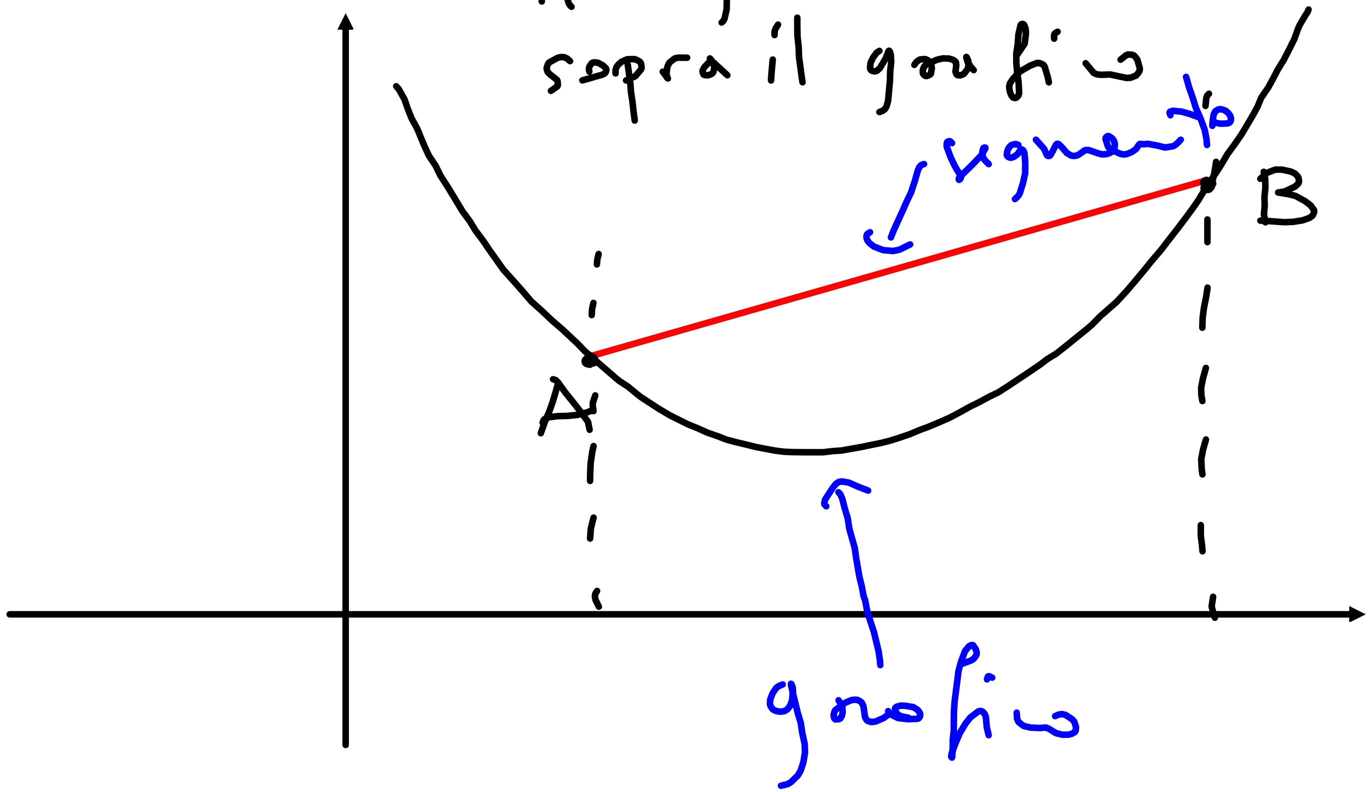
concava

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f si dice convessa in I se presi due punti qualsiasi sul grafico di f il segmento che li unisce è sopra il grafico.

il segmento è sopra il grafico

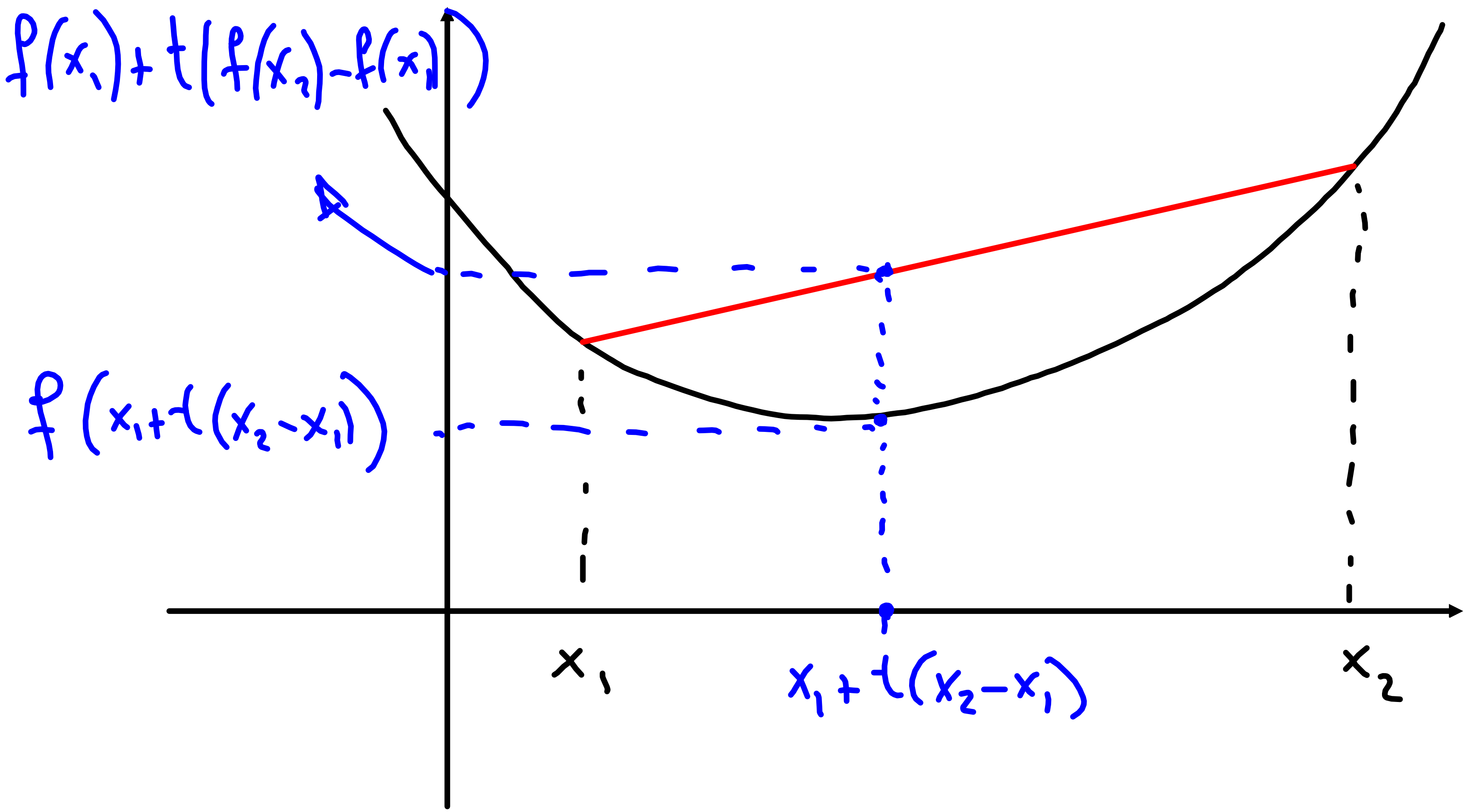


In formule f si dice convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in (0,1)$ risulta

$$f\left(x_1 + t(x_2 - x_1)\right) \leq f(x_1) + t\left(f(x_2) - f(x_1)\right)$$

ordinata del grafico

ordinata del segmento


$f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1))$
$f(x_1+t(x_2-x_1))$
x_1
$x_1+t(x_2-x_1)$
x_2

<u>Def</u>: f si dice concava se $-f$ è convessa.

Oss: Una retta è sia concava che convessa.

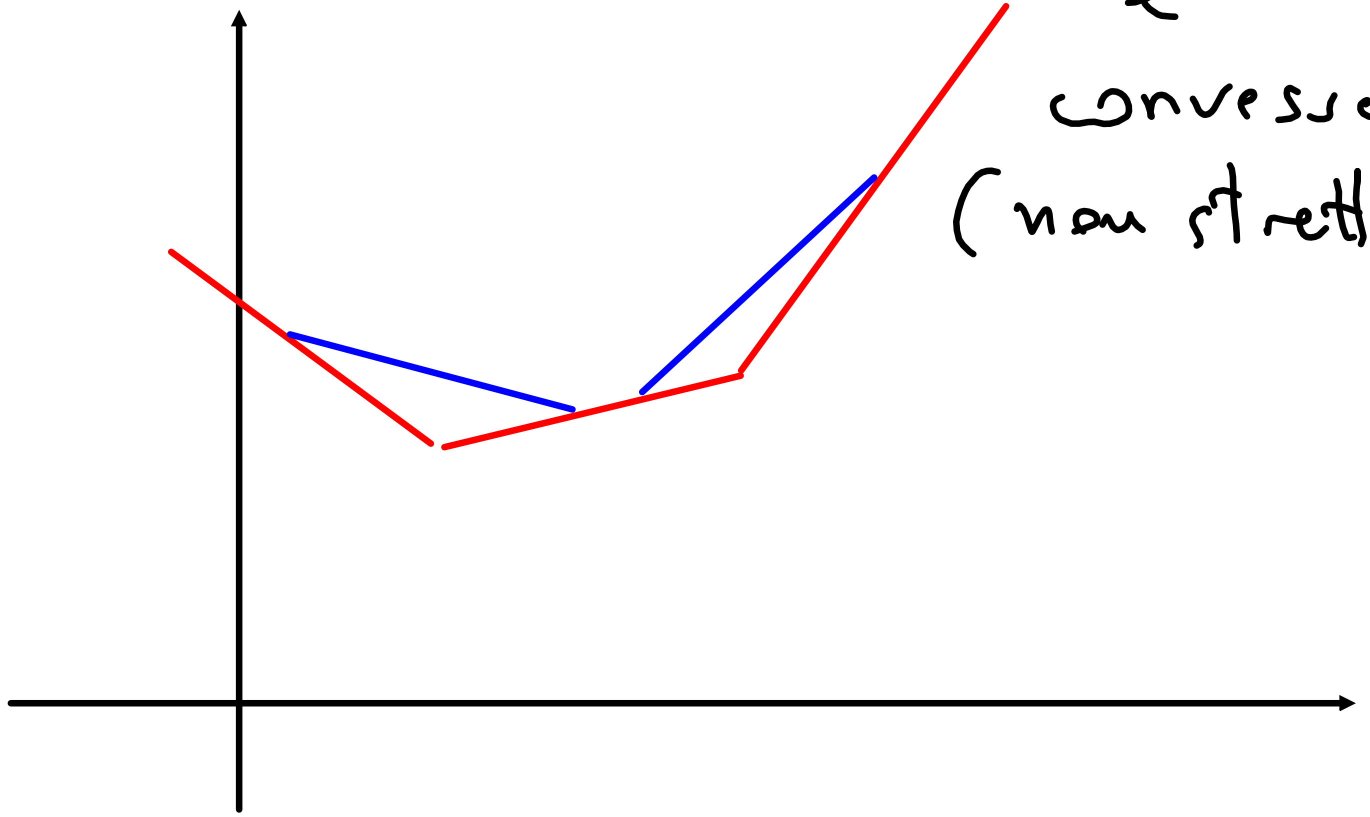
Def: f si dice strettamente convessa se $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1)$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

disuguaglianza stretta.

Il segmento tocca il grafico solo negli estremi.

Oss: la retta non è strettam. convessa.



è convessa (non strett.)

<u>Prop</u>: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte.

Sono equivalenti:

1) f è convessa

2) f' è debolmente crescente

3) $f'' \geq 0$.

Es: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ f è convessa.

Es: $f(x) = e^x$

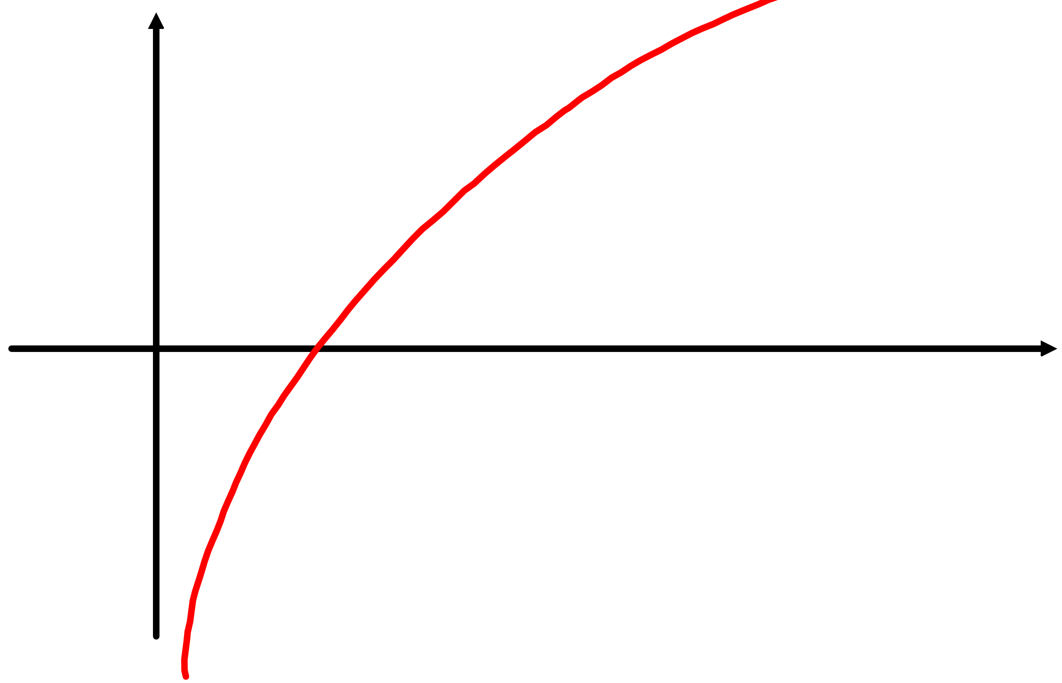
$f' = e^x \qquad f'' = e^x > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa.

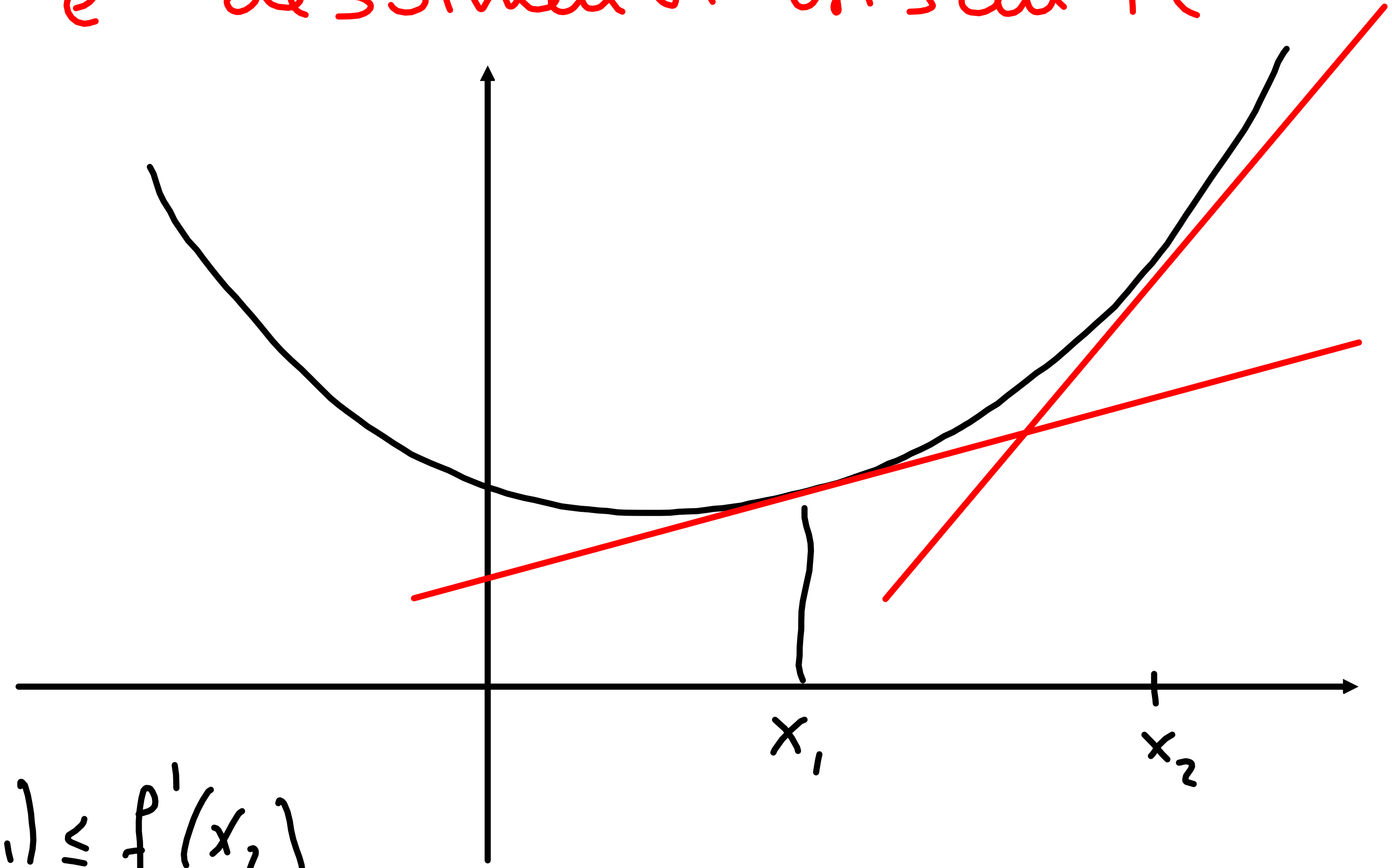
Es: $f(x) = \log x \qquad x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

f è concava



Cosa vuol dire che f' è debolmente crescente



$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

$$x_1 < x_2$$

Es di funzione né concava né convessa.

$$f(x) = \sin x$$

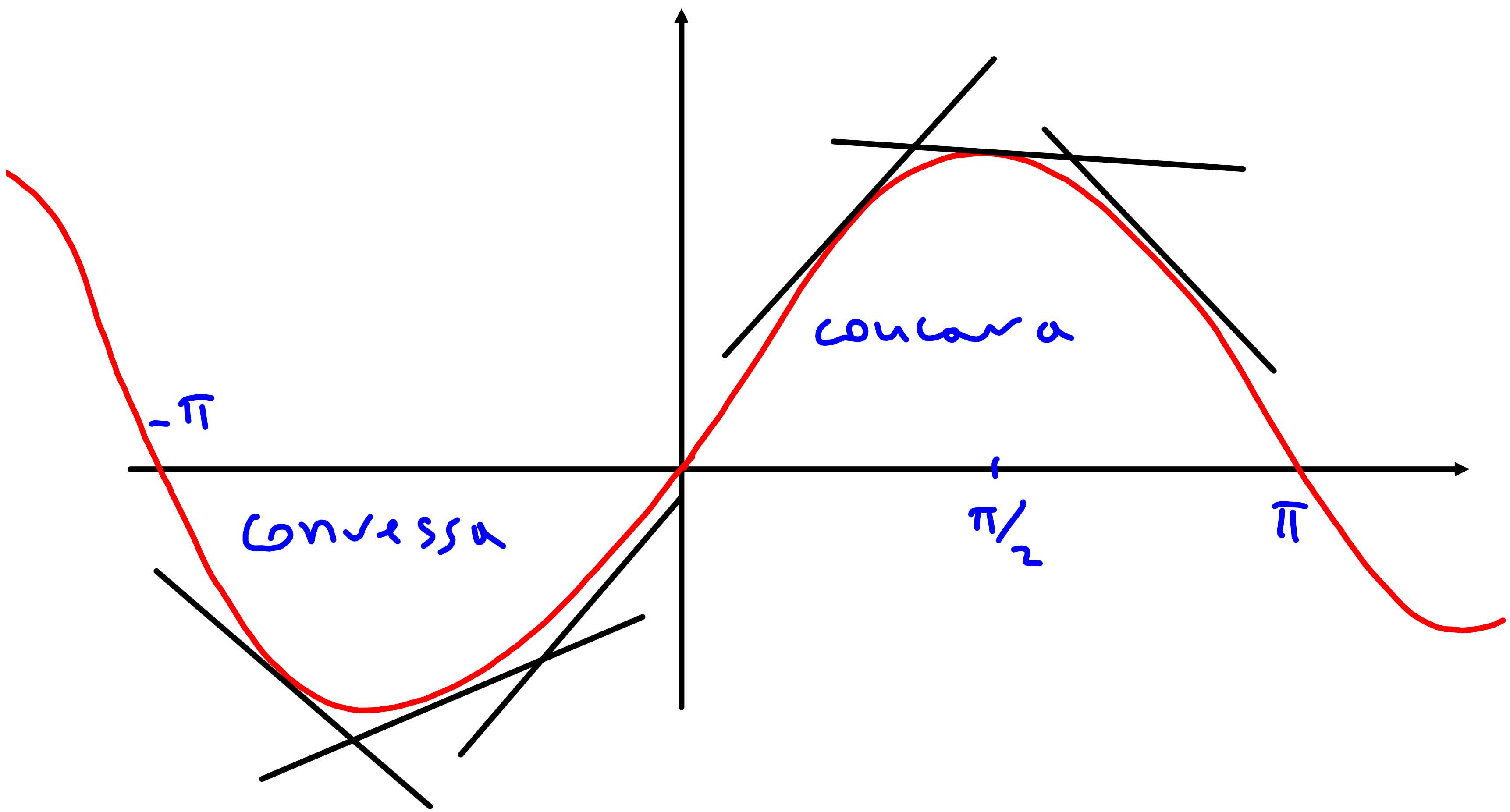
$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) \geq 0 \iff -\sin x \geq 0$$

$$\sin x \leq 0 \qquad x \in [\pi, 2\pi]$$

e si ripete periodic.



concava
convessa
$-\pi$
$\pi/2$
π

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I.

f è convessa in I se $\forall x_0 \in I$

il grafico di f è sopra la

tangente tracciata nel

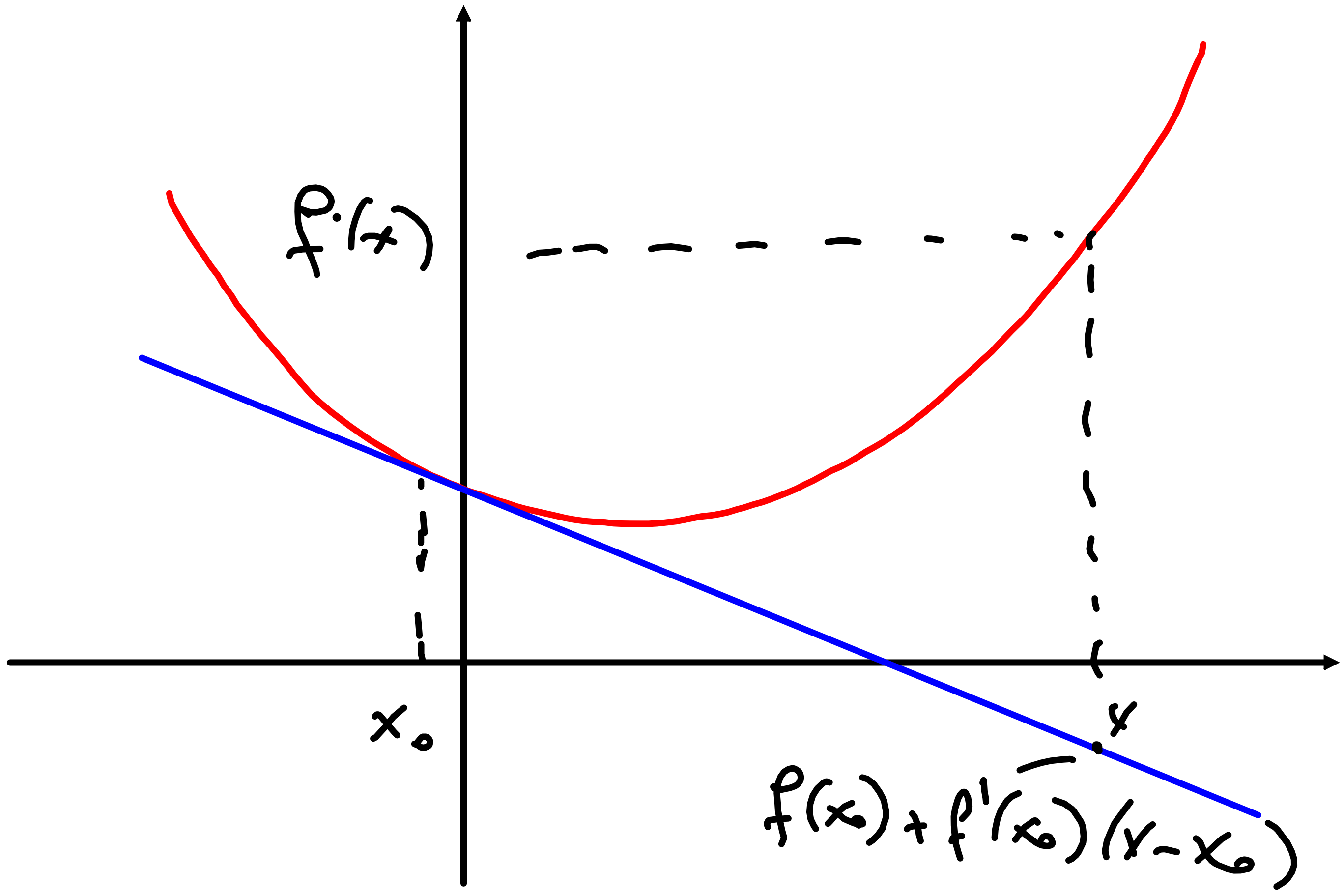
punto di ascissa x_0.

cioè

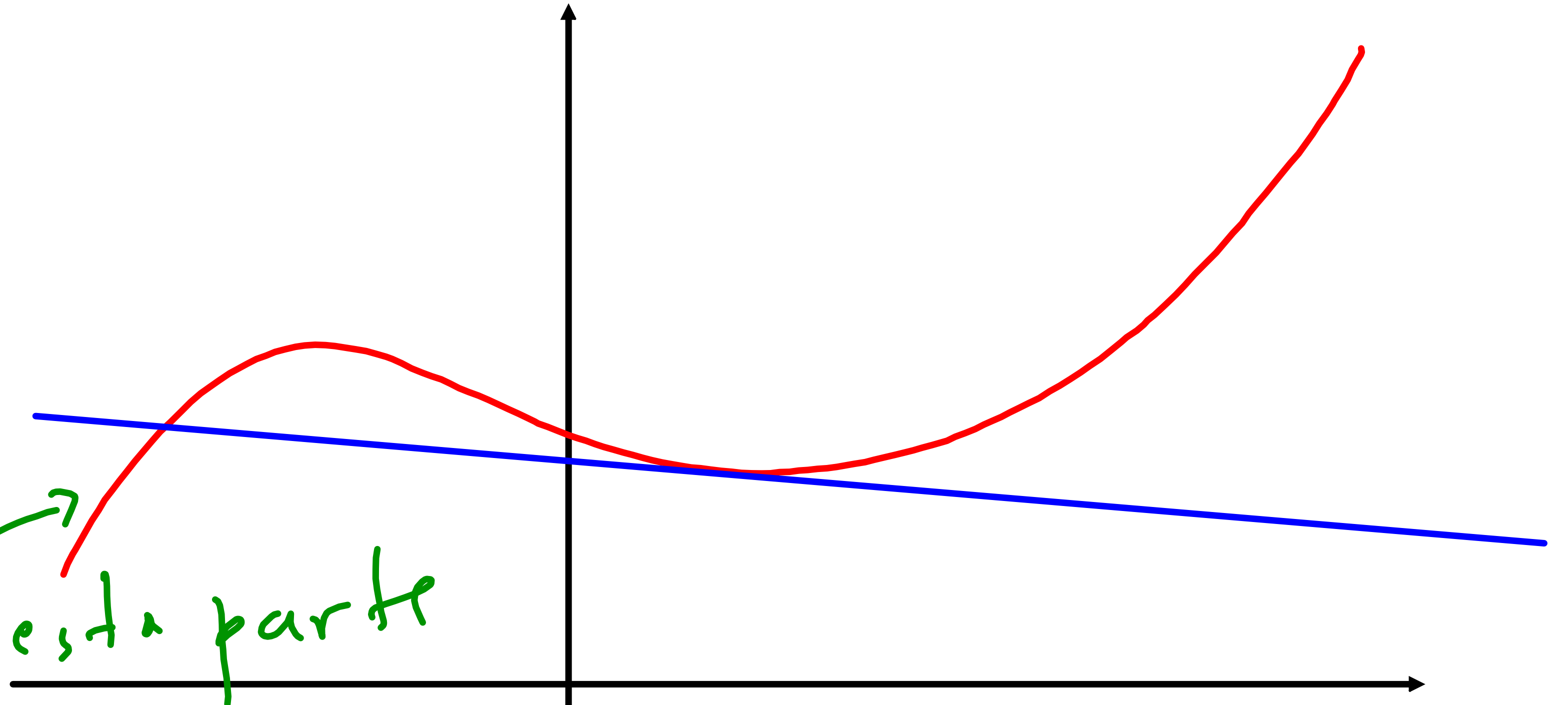
$$f(x) \geq \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$\forall\, x, x_0 \in I \quad .$$

retta tangente



$f(x)$
x_0
x
$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



questa parte del grafico è sotto la tangente. → f non è convessa.