Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Secondo compitino - 4/4/2014

Esercizio 1.

Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{C}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ k^2-1 & 0 & 2-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e sia $L_k \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^4)$ l'endomorfismo definito da $L_k(X) = A_k X$ per ogni $X \in \mathbb{C}^4$.

(i) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{C}$, la forma di Jordan di L_k.

(ii) Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ di Jordan per L_k.

(iii) Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ esiste un unico sottospazio W di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 3, L_k-invariante e tale che l'endomorfismo $L_{k|W} : W \to W$ è diagonalizzabile.

Esercizio 2.

Su $V = \mathbb{R}_3[x]$ si consideri il prodotto scalare $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ definito da

$$\Phi(p(x), q(x)) \;=\; p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

(i) Si determini una base del radicale $Rad(\Phi)$ e si calcoli l'indice di Witt $w(\Phi)$.

(ii) Si determini esplicitamente, se esiste, un funzionale $f \in V^*$ non Φ- rappresentabile.

(iii) Si verifichi che la restrizione di Φ al sottospazio vettoriale

$$W = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(3) = 0\}$$

è non degenere.

(iv) Sia $T : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$T(p(x)) \;=\; p(x) + p(3-x).$$

Si dimostri che $T(W) \subseteq W$ e che la restrizione $T_{|W} : W \to W$ è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $\Phi_{|W}$.

Esercizio 3.

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(i) Esiste $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^5)$ avente un unico autovalore λ tale che

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id)^3 = 3 \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id)$$

e tale che il polinomio minimo di f sia $m_f(t) = (t - \lambda)^4$.

(ii) Sia $A \in SO(n)$, n dispari. Allora esiste un sottospazio 1-dimensionale r di $\mathbb{R}^n$ tale che $Av = v$ per ogni $v \in r$.

<u>**Soluzioni**</u>

Esercizio 1.

(i) Il polinomio caratteristico di L_k è $p_k(t) = \det(A_k - t\,I) = (1-t)^3(k-t)$.

• Se $k = 1$, $p_1(t) = (1-t)^4$ per cui l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica $\mu_a(1) = 4$ e molteplicità geometrica $\mu_g(1) = \dim V(1) = 4 - \mathrm{rk}(A_1 - I) = 4 - 1 = 3$. Di conseguenza la forma di Jordan di L_1 contiene 3 blocchi relativi all'autovalore 1, ossia $J(L_1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

Se $k \neq 1$ la matrice A_k, oltre all'autovalore k di molteplicità algebrica 1, ha l'autovalore 1 con $\mu_a(1) = 3$. Poiché $A_k - I = \begin{pmatrix} k^2-1 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k^2-1 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$, il rango di $A_k - I$ vale 2 se $k \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, mentre vale 1 se $k = -1$. Di conseguenza:

- se $k \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, $\mu_g(1) = 4 - 2 = 2$ e $J(L_k) = \begin{pmatrix} k & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$,
- se $k = -1$, $\mu_g(1) = 4 - 1 = 3$, A_{-1} è diagonalizzabile e $J(L_{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Fissato $k = 2$ si ha $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dalla soluzione del punto (i) già sappiamo che $J(L_2) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, che $\mathbb{C}^4 = V(2) \oplus V'(1)$ con $\dim V'(1) = 3$. Con facili conti si ottiene:

- $V(2) = \mathrm{Ker}(A_2 - 2I) = Span(e_2 + e_4)$
- $V(1) = \mathrm{Ker}(A_2 - I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Span(e_2, e_1 + e_3)$
- $V'(1) = \mathrm{Ker}(A_2 - I)^2 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Span(e_1, e_2, e_3)$.

Dunque $V'(1) = \mathrm{Ker}(A_2 - I) \oplus Span(e_1)$. Poiché $(A_2 - I)e_1 = 3e_1 + 3e_3$ e, ad esempio, $\{3e_1 + 3e_3, e_2\}$ è una base di $V(1)$, l'insieme $\{e_2 + e_4, e_2, 3e_1 + 3e_3, e_1\}$ è una base di $\mathbb{C}^4$ di Jordan per L_2 rispetto alla quale la matrice associata a L_2 è $J(L_2) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Dal punto (i) sappiamo che per $k \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ esiste una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ rispetto alla quale la matrice associata a L_k è $\begin{pmatrix} k & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Certamente il sottospazio $Span(v_1, v_2, v_3,)$ verifica le richieste. Se per assurdo esistessero due sottospazi vettoriali $W_1 \neq W_2$ di dimensione 3, L_k-invarianti e tali che le restrizioni di L_k sia a W_1 che a W_2 sono diagonalizzabili, allora si avrebbe $W_1 + W_2 = \mathbb{C}^4$, ed unendo una base di autovettori per $L_k|_{W_1}$ ad una base di autovettori per $L_k|_{W_2}$ si otterrebbe un insieme di generatori di $\mathbb{C}^4$ costituito da autovettori per L_k. Da tale insieme si potrebbe estrarre una base di $\mathbb{C}^4$ di autovettori per L_k, il che è assurdo perché L_k non è diagonalizzabile.

Un modo alternativo di provare l'unicità del sottospazio è il seguente.
Il polinomio minimo di L_k è $m(t) = (t-k)(t-1)^2$. Se W è un sottospazio con le proprietà richieste, allora il polinomio minimo $m_W(t)$ di $L_{k|W}$ deve essere prodotto di fattori lineari con molteplicità 1 e deve dividere $m(t)$. Dunque le uniche possibilità sono:
• $m_W(t) = t-k$: in questo caso $W \subseteq V(k, L_k)$, che è assurdo perché $\dim V(k, L_k) = 1$,
• $m_W(t) = t-1$: in questo caso $W \subseteq V(1, L_k)$, che è assurdo perché $\dim V(1, L_k) = 2$,
• $m_W(t) = (t-k)(t-1)$: in questo caso $W \subseteq V(1, L_k) \oplus V(k, L_k)$. Poiché $\dim(V(1, L_k) \oplus V(k, L_k)) = 3$, allora $W = V(1, L_k) \oplus V(k, L_k)$.

Dunque esiste un unico sottospazio W con le proprietà richieste.

Esercizio 2.

(i) Evidentemente $\{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\} \subseteq Rad(\Phi)$. D'altra parte se $p(x) \in Rad(\Phi)$, allora in particolare $\Phi(p,p) = p(1)^2 + p(2)^2 = 0$ e dunque $p(1) = p(2) = 0$. Dunque $Rad(\Phi) = \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\}$ e i polinomi $g_1(x) = (x-1)(x-2)$ e $g_2(x) = x(x-1)(x-2)$ formano una base di $Rad(\Phi)$.

Inoltre Φ è evidentemente semidefinito positivo, per cui $\sigma(\Phi) = (2, 0, 2)$. Come noto, se U è un supplementare di $Rad(\Phi)$, allora $w(\Phi) = \dim Rad(\Phi) + w(\Phi_{|U})$. Poiché $\sigma(\Phi_{|U}) = (2, 0, 0)$ e quindi $w(\Phi_{|U}) = 0$, allora $w(\Phi) = 2$.

(ii) L'insieme dei funzionali Φ-rappresentabili coincide con $Ann(Rad(\Phi))$. Dunque basta prendere un funzionale $L \colon V \to \mathbb{R}$ che non si annulli identicamente su $Rad(\Phi)$. Ad esempio il funzionale definito da $L(p) = p(0)$ non è Φ-rappresentabile.

(iii) Il sottospazio W ha dimensione 2. Se $p \in W \cap Rad(\Phi)$, allora $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$ per cui $p = 0$. Allora $V = W \oplus Rad(\Phi)$ e dunque necessariamente $\Phi_{|W}$ è non degenere.

(iv) La verifica che $T(W) \subseteq W$ è immediata. Inoltre dalle definizioni segue subito che $\Phi(T(p), q) = \Phi(p, T(q))$ per ogni $p, q \in W$.

Esercizio 3.

(i) L'affermazione è falsa. Se per assurdo esistesse un endomorfismo f con le proprietà richieste, poiché $\deg m_f(t) = 4$, la forma di Jordan di f sarebbe formata da un blocco relativo a λ di ordine 4 e un blocco relativo a λ di ordine 1. Poiché $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id)$ coincide con il numero totale dei blocchi relativi a λ, avremmo che $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id) = 2$, e dunque $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id)^3 = 6$, il che è assurdo.

(ii) L'affermazione è vera. Supponiamo per assurdo che esista una matrice $A \in SO(n)$, con n dispari, che non ha 1 come autovalore, ossia tale che $Fix(A) = \{O\}$. Come noto, le isometrie lineari di $\mathbb{R}^n$ sono composizione di $n-k$ riflessioni lineari, dove k denota la dimensione del luogo dei punti fissi dell'isometria. Dunque A sarebbe prodotto di n riflessioni; poiché il determinante di una riflessione è -1 e n è dispari, allora avremmo $\det A = -1$, in contraddizione col fatto che $A \in SO(n)$.

Un modo alternativo di provare che l'affermazione è vera è utilizzando la forma normale delle matrici di $O(n)$. Se per assurdo esistesse una matrice $A \in SO(n)$ senza punti fissi non nulli (ossia senza autovettori relativi a 1), la forma normale di A sarebbe una matrice diagonale a blocchi con un blocco di tipo $-Id_k$ e un numero finito di blocchi 2×2 che rappresentano rotazioni e dunque hanno determinante 1. Poicé n è dispari, allora k è dispari, ma allora $\det A = (-1)^k = -1$, in contraddizione col fatto che $A \in SO(n)$.