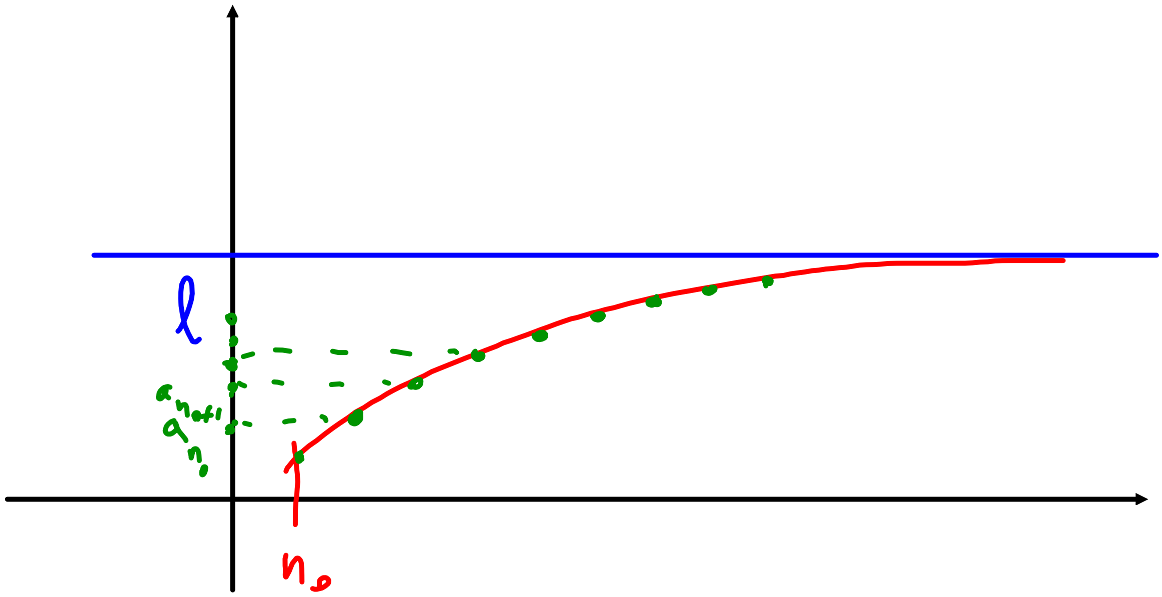
Teorema: $n_0 \in \mathbb{N}$ $f:[n_0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ poniamo
$a_n = f(n)$. Se esiste
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ allora
$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.



l
a_{n_0+1}
a_{n_0}
n_0

Es: $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$

perché $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$.

Es: $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n}$

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = x \left[\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = 1.$

oppure, direttamente

$$n \sin \frac{1}{n} = n \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \to 1$$

ho usato la sostituzione

$$\sin t = t + o(t^2) \text{ se } t \to 0$$

$t = \frac{1}{n}$ lo posso fare

perchè se $n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$.

Il <u>viceversa in generale è</u> falso

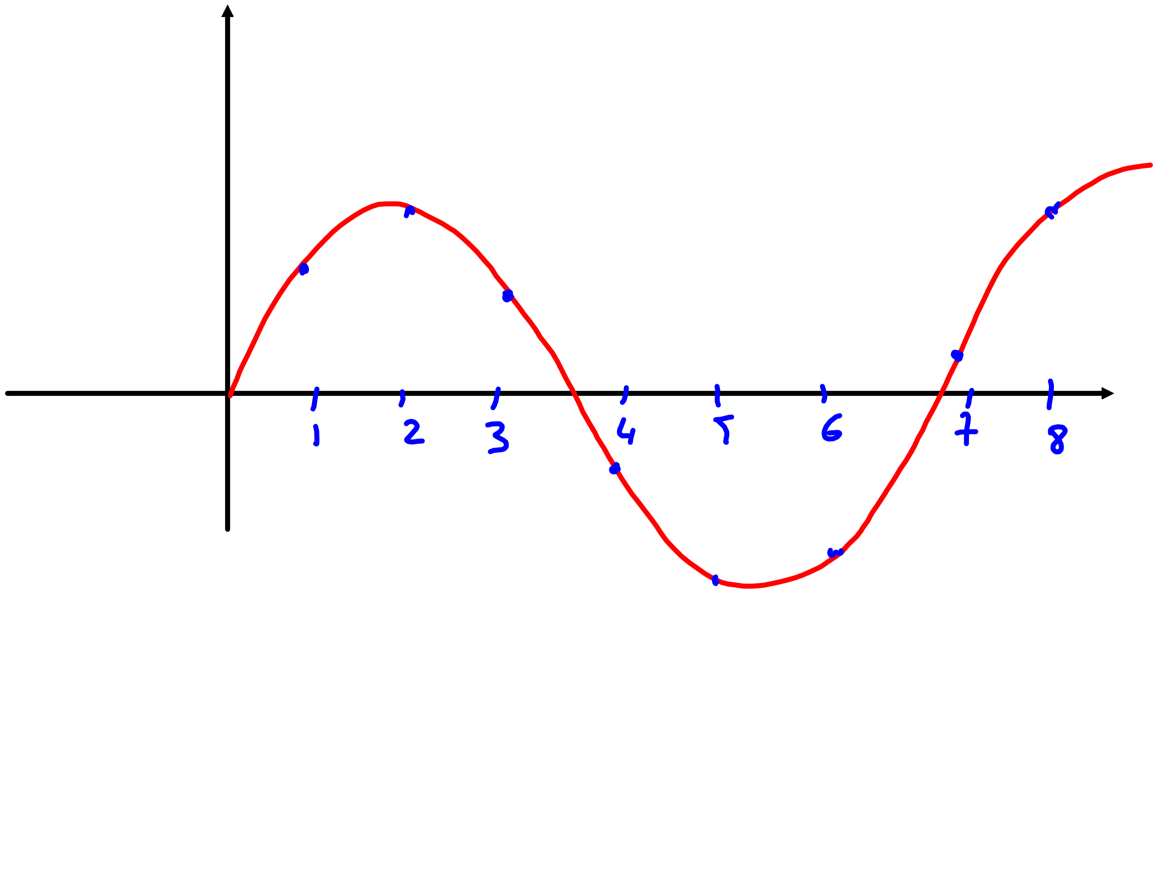
Es: $f(x) = \sin(\pi x)$

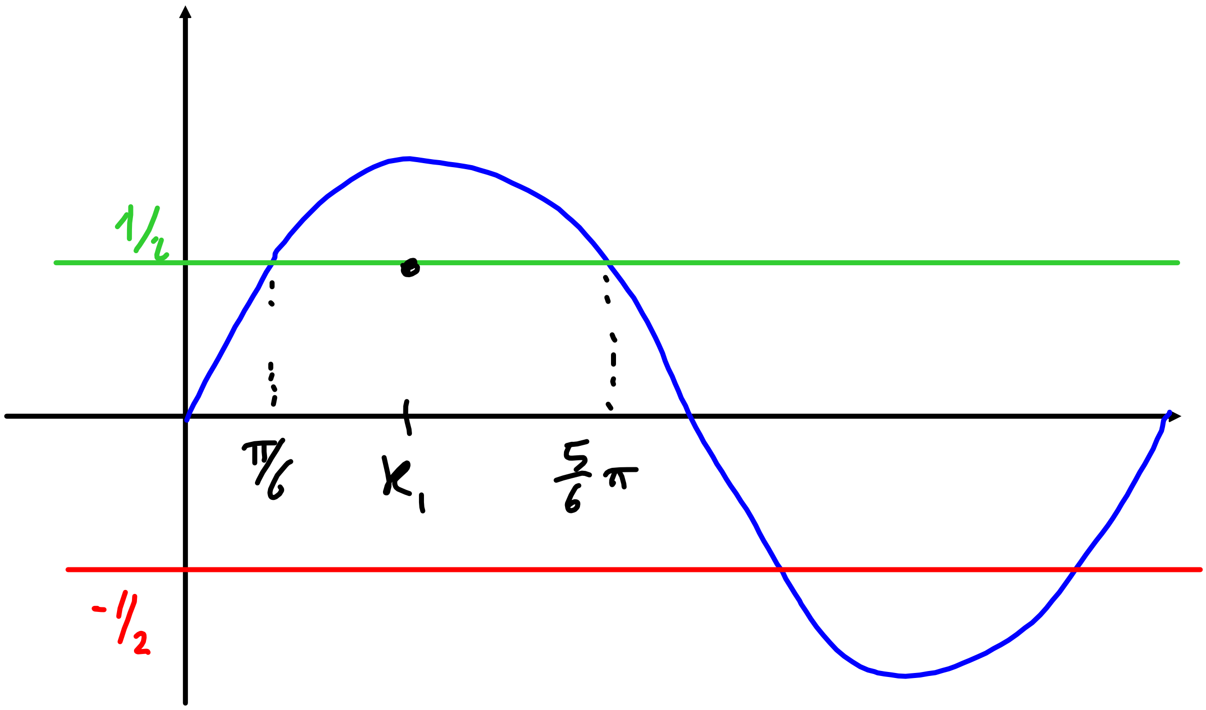
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \nexists$$

ma $f(n) = \sin(n\pi) = 0 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(n) = 0 \, .$$

Es: $\lim_{n \to \infty} \sin n$





1/2
-1/2
π/6
x_1
$\frac{5}{6}\pi$

risolvo la disequazione

$$\sin n > \frac{1}{2}$$

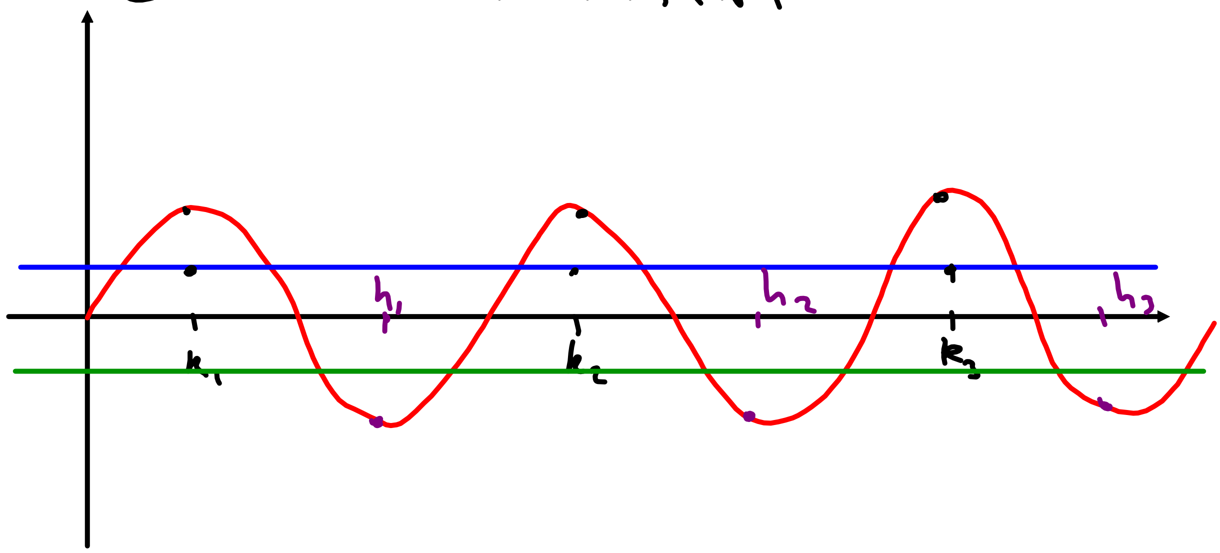
$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$

$\Rightarrow \sin x > \frac{1}{2}$ in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$

l'intervallo è di lunghezza

$$\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi > 2$$

nell'intervallo ci sono almeno 2 numeri interi



posso costruire una sottosuccessione

t.c. $\sin(k_n) > \frac{1}{2} \quad \forall n.$

Per lo stesso motivo posso costruire una sottosuccessione

h_n t.c.

$$\sin(h_n) < -\frac{1}{2}$$

Se esistesse $\lim_{n\to\infty} \sin n = \ell$

allora dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} \sin(k_n) = \ell \geq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin(h_n) = \ell \leq -\frac{1}{2}$$

assurdo.

Es: $a_n = n^2 e^{-1/n} \sin n$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = e^{-\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-1/n} = \infty \cdot 1 = \infty$$

$\exists\ k_n \to \infty$ t.c. $\sin(k_n) > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad a_{k_n} = (k_n)^2 e^{-1/k_n} \sin(k_n)$$

$$> (k_n)^2 e^{-1/k_n} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow +\infty$$

$\to +\infty$

Allo stesso modo posso trovare

$h_n \to \infty$ t.c. $\sin(h_n) < -\frac{1}{2}$

$$a_{h_n} = (h_n)^2 e^{-1/h_n} \sin(h_n) <$$

$$< -(h_n)^2 e^{-1/h_n} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow -\infty$$

$a_{k_n} \longrightarrow +\infty$, $a_{h_n} \longrightarrow -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una successione e $\{a_{k_n}\}$, $\{a_{h_n}\}$ due sottosucc. estratte t.c.

$$\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{h_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

(saturano tutti gli indici).

Se $\exists \lim_{n \to \infty} a_{k_n} = l$ e se

$\exists \lim_{n\to\infty} a_{h_n} = \ell$ allora

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Es:
$$a_n = \frac{\log(n+1)^{(-1)^n}}{n^3}, \quad n \geq 1$$

indici pari

$$a_{2n} = \frac{\log(2n+1)^{(-1)^{2n}}}{(2n)^3} = \frac{\log(2n+1)}{8n^3}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n} = 0$$

n dispari

$$a_{2n+1} = \frac{\log(2n+2)^{(-1)^{2n+1}}}{(2n+1)^3} =$$

$$= \frac{[\log(2n+2)]^{-1}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{[\log(2n+2)](2n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ dato che $\{2n\}$ e $\{2n+1\}$
saturano tutto $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

max ? min ?

$a_n > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \{a_n\}$ ha max

$\log(n+1) > 0$

$\inf a_n = 0$

$\Rightarrow \min\{a_n\} \nexists$ perché $\underline{\underline{a_n > 0}}$.

Criterio del rapporto

Se $a_n > 0$ definitivamente

e $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

allora

1) se $0 \leq l < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

2) se $l > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Oss: Se $\ell = 1$ non si applica il criterio.

Es: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Es: $a_n = 2^n$

criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Es: $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots$$
$$\geq n$$

Es: $k \in \mathbb{N}$ fissato, $k \geq 1$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^k} = \frac{\infty}{\infty}$$

criterio del rapporto.

$$a_n = \frac{n!}{n^k} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{n!}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^k}{(n+1)^k}}}_{\to 1} \to \infty \cdot 1 = \infty$$

$\ell = +\infty$

$\ell > 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Es: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{b^n}$ $\quad b>1$

a_n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!}}{b^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{b^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{b} \to +\infty$$

$\ell = +\infty > 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Es.: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

rapporto $\quad a_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty.$$

Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Se $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ allora

1) Se $0 \leq l < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Se $l > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Oss: Se $l = 1$ il criterio non si applica.

---

dim del criterio della radice.

1) $0 \leq l < 1$. Posso trovare

$m \in \mathbb{R}$: $l < m < 1$.

dato che $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

$\exists \bar{n}$: se $n \geq \bar{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < m$

basta scegliere $\varepsilon = m - \ell$
nella definizione di limite.

$$\Rightarrow \quad 0 \le a_n < m^n$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} m^n = 0$$

perché $\quad 0 < m < 1$.

Caso 2) se $\ell > 1 \Rightarrow$ posso trovare

$m : \quad 1 < m < \ell$

$\Rightarrow \exists\ \bar{n} :$ se $n \geq \bar{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > m$

$\Rightarrow \quad a_n > m^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} m^n = +\infty$

perché $m > 1$. $\square$

Teorema: Se $a_n > 0$ definiti

e se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Oss: Il viceversa è falso

cioè potrebbe esistere

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e non esistere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Es: se $a > 0$ fissato

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

infatti $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

applico il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow l = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Es: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

pari $\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{1} \longrightarrow 1$

dispari $\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{2} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$.

oppure

$$1 \leq a_n \leq 2$$

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \nexists$$