Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione del 14 ottobre 2018

Domanda 1 La successione $a_n = \dfrac{1}{\log(n^3)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ definita per $n \geq 2$

A) converge B) ha minimo
C) è definitivamente debolmente decrescente D) non è limitata inferiormente

B

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{n^2 + \sin n - e^n}{(\log n)^2 + n^n}$ definita per $n \geq 1$

A) è limitata B) è debolmente decrescente
C) è inferiormente ma non superiormente limitata
D) è superiormente ma non inferiormente limitata

A

Domanda 3 La successione $a_n = \dfrac{n + e^n}{2 - \cos n}$

A) diverge positivamente B) ha limite finito C) non ha limite e non è limitata
D) non ha limite ma è limitata

A

Domanda 4 La successione $a_n = n(1 + (-1)^n)$
A) tende a $+\infty$ B) non ha limite ma è limitata
C) non è limitata né inferiormente né superiormente D) non ha limite ma è limitata inferiormente

D

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{1}{n}(\sin^2(e^n) + 1)\cos\dfrac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,
A) ha minimo B) ha massimo C) non ha limite D) non è limitata superiormente

B

Domanda 6 La successione $a_n = \dfrac{e^{n!\tan(n\pi)} - 1 + n^2 \sin n}{\log(1 + 3^{n\log n})\log(n + 5^n)}$
A) ha minimo ma non ha massimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

C

Domanda 7 La successione $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}, \quad n \geq 1$
A) è debolmente crescente B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) è limitata superiormente

D

Domanda 8
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(n^2) + \log n}{(-1)^n(3n^2 + 1)} =$$
A) 0 B) $\dfrac{2}{3}$ C) non esiste D) $+\infty$

A

Domanda 9 La successione $a_n = n(-1)^n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$
A) non ha né massimo né minimo B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite ma è limitata D) non è limitata né superiormente né inferiormente

B

Domanda 10 La successione $a_n = \left(\cos\dfrac{n\pi - \sin\frac{2}{n}}{n + 3}\right)\tan\sqrt{\dfrac{3 + (-1)^n}{n^2\cos\frac{1}{n}}}$
A) è a segni alternati B) è limitata superiormente ma non inferiormente
C) è limitata D) è limitata inferiormente ma non superiormente

C

codice

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione del 14 ottobre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Trovare il limite, il massimo e il minimo della successione

$$a_n = \frac{n(-1)^n + 1}{2n(-1)^n + 1}.$$

Soluzione
Per quanto riguarda il limite, moltiplicando numeratore e denominatore per $(-1)^n$ otteniamo che

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^n} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Per trovare massimo e minimo, distinguiamo il comportamento della successione per gli indici pari e per quelli dispari. Le due sottosuccessioni che otteniamo sono

$$b_n = a_{2n} = \frac{2n + (-1)^{2n}}{2(2n) + (-1)^{2n}} = \frac{2n+1}{4n+1}$$

$$c_n = a_{2n+1} = \frac{2n + 1 + (-1)^{2n+1}}{2(2n+1) + (-1)^{2n+1}} = \frac{2n}{4n+1}.$$

Studiamo ora le funzioni

$$f(x) = \frac{2x+1}{4x+1}, \qquad g(x) = \frac{2x}{4x+1}.$$

Il grafici di f e di g sono iperboli con asintoti $x = -\frac{1}{4}$ e $y = \frac{1}{2}$. Calcolandone il valore per $x = 0$ si ottiene subito che sulla semiretta $[0, +\infty)$ f è una funzione decrescente mentre g è crescente. Ne segue che b_n è decrescente e c_n è crescente. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$$

si ottiene che

$$c_0 \le c_n < \frac{1}{2} < b_m \le b_0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che il minimo della successione è $c_0 = 0$ mentre il massimo è $b_0 = 1$.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n + n^4}{n!}}$

Soluzione

$$\boxed{0}$$

Esercizio 3 Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}}{e^n}.$$

Soluzione

Calcoliamo il logaritmo della successione e utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad t \to 0$$

con $t = \frac{1}{n}$.

$$\log a_n = n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n = n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + o(1)$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = -\frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$