

Logica per la Programmazione

Lezione 13

- ▶ Logica del Primo Ordine con **Quantificatori Funzionali**

Estensione del Primo Ordine con Quantificatori Funzionali

- ▶ Abbiamo esteso il linguaggio del primo ordine con
 - ▶ notazione intensionale per **insiemi**
 - ▶ simboli di **disuguaglianza**
 - ▶ notazione per **intervalli**
 - ▶ abbiamo introdotto le relative **leggi** e alcune leggi per le **formule con dominio**
- ▶ Ora aggiungiamo alcuni **“quantificatori funzionali”**
 - ▶ **minimo/massimo** di un insieme di valori
 - ▶ **sommatoria** di un insieme di valori
 - ▶ **cardinalità** di un insieme
 - ▶ sono **quantificatori funzionali** perché restituiscono un valore, non un booleano
 - ▶ anche questi concetti saranno utili per la verifica di programmi con Triple di Hoare

Quantificatore Sommatoria

$$(\sum x : P(x) . E(x))$$

- ▶ denota “la somma di tutti gli $E(v)$ per i valori v per cui vale $P(v)$ ”
- ▶ quindi, $P(x)$ è una formula (“**dominio della sommatoria**”), $E(x)$ è un **termine** (un'espressione)
- ▶ Esempi:
 - ▶ $(\sum x : x > 0 \wedge x \leq 3 . x^2) = 1 + 4 + 9 = 14$
 - ▶ $(\sum x : x \in [3, 5) . 2x + 1) = ?? = 7 + 9 = 16$
 - ▶ $(\sum x : x \in [0, 10) \wedge \text{pari}(x) . x) = ?? = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$
 - ▶ $(\sum x : x > 7 \wedge x \in [0, 10) . 5) = ?? = 5 + 5 = 10$
 - ▶ $(\sum x : \mathbf{F} . 2x + 5) = ?? = 0$

Quantificatore Cardinalità

$$\#\{x : P(x) \mid Q(x)\}$$

- ▶ denota il **numero dei valori** v per cui valgono sia $P(v)$ che $Q(v)$
- ▶ in questo caso sia $P(x)$ e $Q(x)$ sono formule, in particolare $P(x)$ è il **dominio**
- ▶ quindi \mid ha il significato di “ \wedge ”

▶ Esempi:

- ▶ $\#\{x : x \in [0, 10) \mid \text{pari}(x)\} = 5$
- ▶ $\#\{x : x \in [0, 10) \mid (\exists y . y \in \mathbb{N} \wedge y^2 = x)\} = ?? = 4$
- ▶ $\#\{x : \mathbf{T} \mid x^2 \leq x\} = ?? = 2$
- ▶ $\#\{x : \mathbf{F} \mid x \in [3, 5) \wedge \text{pari}(x)\} = ?? = 0$

- ▶ Nota: $\#$ può essere definita mediante Σ :

$$\#\{x : P \mid Q\} = (\Sigma x : P \wedge Q . 1) \quad (\text{Elim-}\#)$$

Quantificatori per Minimo e Massimo

- ▶ Ricordiamo l'ovvia definizione degli operatori binari di **massimo** e **minimo**:

$$a \mathbf{max} b = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{altrimenti} \end{cases} \quad a \mathbf{min} b = \begin{cases} a & \text{se } a \leq b \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ Introduciamo ora i due quantificatori corrispondenti, che denotiamo sempre con **min** e **max**:

$$(\mathbf{max} x : P(x) . E(x))$$

denota il **massimo** dei valori $E(v)$ per tutti i v per cui vale $P(v)$

$$(\mathbf{min} x : P(x) . E(x))$$

denota denota il **minimo** dei valori $E(v)$ per tutti i v per cui vale $P(v)$

- ▶ $P(x)$ è una formula (il **dominio**), $E(x)$ è un'espressione

Minimo e Massimo: Esempi

- ▶ $(\max x : x \in [3, 10) \wedge \text{primo}(x) . x^2) = 7^2 = 49$

Array a

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 45 | 23 | 10 | 16 | 13 |
|----|----|----|----|----|

- ▶ $(\min i : i \in [0, 5) . a[i]) = ?? = 10$
- ▶ $(\max i : i \in [0, 5) \wedge \text{primo}(a[i]) . a[i]) = ?? = 23$
- ▶ $(\min i : i \in [0, 5) \wedge \text{primo}(a[i]) . i) = ?? = 1$

Sintassi del Primo Ordine con Quantificatori Funzionali

- ▶ Estendiamo le categorie sintattiche di **termini**, **costanti** ed **espressioni** con la sintassi vista:

$$\begin{aligned}
 \textit{Term} & ::= \dots \mid (\Sigma \textit{Var} : \textit{Fbf} . \textit{Term}) \mid \#\{\textit{Var} : \textit{Fbf} \mid \textit{Fbf}\} \mid \\
 & \quad (\mathbf{max} \textit{Var} : \textit{Fbf} . \textit{Term}) \mid (\mathbf{min} \textit{Var} : \textit{Fbf} . \textit{Term}) \mid \textit{Exp} \\
 \textit{Const} & ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid +\infty \mid -\infty \\
 \textit{Exp} & ::= \text{ ordinarie espressioni aritmetiche }
 \end{aligned}$$

- ▶ x occorre **legata** in

$$(\Sigma x : P . E), \quad \#\{x : P \mid Q\}, \quad (\mathbf{max} x : P . E), \quad (\mathbf{min} x : P . E)$$

Leggi per i Quantificatori Funzionali

- ▶ I **quantificatori funzionali**, introdotti come estensione della Logica dei Predicati, possono essere definiti nella logica estesa con i naturali.
- ▶ Nella **dispensa [LP2] “Logica per la Programmazione: Applicazioni”** sono riportate numerose leggi che descrivono loro proprietà.
- ▶ Molte di queste descrivono proprietà abbastanza ovvie: ne vediamo velocemente alcune.
- ▶ **Altre sono molto importanti per la parte del corso su Triple di Hoare, e le vediamo in dettaglio.**
- ▶ Come al solito, **le leggi sono dimostrabili usando le definizioni e/o altre leggi.**

Leggi Generali (come per le normali Quantificazioni)

► Legge di ridenominazione

ad esempio

$$(\sum x : P . E) = (\sum y : P[y/x] . E[y/x])$$

se y non occorre né in P né in E

► Legge di annidamento

ad esempio

$$(\sum y : R . (\sum x : S . P)) = (\sum x : S . (\sum y : R . P))$$

se y non è libera in S e x non è libera in R

Leggi Specifiche

▶ (min:max)

$$\text{▶ } (\min x : P . -E) = -(\max x : P . E)$$

▶ Dominio equivalente (analogamente per gli altri quantificatori):

$$\text{▶ } (\forall x . P \equiv Q) \Rightarrow \#\{x : P \mid R\} = \#\{x : Q \mid R\} \quad (\# : \equiv)$$

▶ Inclusione di Dominio:

$$\text{▶ } (\forall x . P \Rightarrow Q) \Rightarrow \#\{x : P \mid R\} \leq \#\{x : Q \mid R\} \quad (\# : \Rightarrow)$$

$$\text{▶ } (\forall x . P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\max x : P . E) \leq (\max x : Q . E) \quad (max : \Rightarrow)$$

$$\text{▶ } (\forall x . P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\min x : P . E) \geq (\min x : Q . E) \quad (min : \Rightarrow)$$

$$\text{▶ } (\forall x . (E \geq 0) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\Sigma x : P . E) \leq (\Sigma x : Q . E) \quad (\Sigma : \Rightarrow)$$

$$\text{▶ } (\forall x . (E \leq 0) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (\Sigma x : P . E) \geq (\Sigma x : Q . E) \quad (\Sigma : \Rightarrow)$$

Leggi di Distributività

$$\blacktriangleright (\Sigma_{x : P} . E + F) = (\Sigma_{x : P} . E) + (\Sigma_{x : P} . F) \quad (\Sigma : +)$$

$$\blacktriangleright (\mathbf{max} \ x : P . E \ \mathbf{max} \ F) = (\mathbf{max} \ x : P . E) \ \mathbf{max} \ (\mathbf{max} \ x : P . F)$$

$$\blacktriangleright (\mathbf{min} \ x : P . E \ \mathbf{min} \ F) = (\mathbf{min} \ x : P . E) \ \mathbf{min} \ (\mathbf{min} \ x : P . F)$$

Costante

- ▶ $(\sum x : P . c) = c \times (\sum x : P . 1)$ se x non è libera in c
- ▶ $(\mathbf{m} x : P . c) = c$ se x non è libera in c e P non è vuoto
dove $\mathbf{m} \in \{\mathbf{min}, \mathbf{max}\}$
- ▶ $(\sum x : P . c \times E) = c \times (\sum x : P . E)$ se x non è libera in c
- ▶ $(\mathbf{m} x : P . c + E) = c + (\mathbf{m} x : P . E)$
se x non è libera in c e P non è vuoto

Leggi di Dominio

- ▶ $(\sum x : P \vee Q . E) = (\sum x : P . E) + (\sum x : Q . E) - (\sum x : P \wedge Q . E)$
- ▶ $\#\{x : P \vee Q \mid R\} = \#\{x : P \mid R\} + \#\{x : Q \mid R\} - \#\{x : P \wedge Q \mid R\}$
- ▶ $(\max x : P \vee Q . E) = (\max x : P . E) \max (\max x : Q . E)$
- ▶ $(\min x : P \vee Q . E) = (\min x : P . E) \min (\min x : Q . E)$

Singoletto e Dominio Vuoto



$$(\Sigma x : x = y . E) = E[y/x]$$



$$\#\{x : x = y \mid R\} = \begin{cases} 1 & \text{se } R[y/x] \\ 0 & \text{se } \neg R[y/x] \end{cases}$$

▶ se P è vuoto

$$(\Sigma x : P . E) = 0$$

▶ se P è vuoto

$$\#\{x : P \mid Q\} = 0$$

▶ se P è vuoto

$$(\min x : P . E) = +\infty$$

▶ se P è vuoto

$$(\max x : P . E) = -\infty$$

Leggi dell'Intervallo

Sia $[a, b]$ un intervallo non vuoto di naturali

$$(\sum x : x \in [a, b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\sum x : x \in [a, b] \wedge P . E) + E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\sum x : x \in [a, b] \wedge P . E) & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

$$\#\{x : x \in [a, b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a, b] \wedge P\} + 1 & \text{se } P[b/x] \\ \#\{x : x \in [a, b] \wedge P\} & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

$$(\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P . E) \mathbf{m} E[b/x] & \text{se } P[b/x] \\ (\mathbf{m} x : x \in [a, b] \wedge P . E) & \text{se } \neg P[b/x] \end{cases}$$

Attenzione: queste leggi sono errate nella dispensa

Uso di Leggi dell'Intervallo: Esempio

$$s = (\Sigma x : x \in [1, 3] \wedge \text{pari}(x) . x^2) \equiv (s = 4)$$

$$s = (\Sigma x : x \in [1, 3] \wedge \text{pari}(x) . x^2)$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \neg \text{pari}(3)\}$$

$$s = (\Sigma x : x \in [1, 2] \wedge \text{pari}(x) . x^2)$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \text{pari}(2)\}$$

$$s = (\Sigma x : x \in [1, 1] \wedge \text{pari}(x) . x^2) + 2^2$$

$$\equiv \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \neg \text{pari}(1)\}$$

$$s = (\Sigma x : x \in \emptyset \wedge \text{pari}(x) . x^2) + 2^2$$

$$\equiv \{(\Sigma\text{-vuoto})\}$$

$$s = 0 + 2^2$$

$$\equiv \{\text{calcolo}\}$$

$$s = 4$$

Esercizi

Utilizzando le leggi del primo ordine e quelle dei quantificatori funzionali, dimostrare le seguenti formule:

- ▶ $k = (\mathbf{min} x : x \in [a, b) \wedge P . x) \wedge k \in [a, b) \Rightarrow (\forall x . x \in [a, k) \Rightarrow \neg P)$
- ▶ $(\mathbf{((min} x : x \in [0, N) \wedge P . x) \min N) \neq N) \equiv (\exists x . x \in [0, N) \wedge P)$
con N numero naturale

Formalizzazione di Enunciati con Quantificatori Funzionali

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- ▶ x è il Massimo Comun Divisore di y e z (usando il predicato $Divide(x, y) \equiv (\exists z . y = x * z)$)
- ▶ x è un numero **perfetto** (cioè è la somma dei suoi divisori eccetto se stesso)
- ▶ la sequenza **a** contiene più numeri pari che numeri dispari
- ▶ x è il numero di elementi della sequenza **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono
- ▶ x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi di **a** con indice pari

Altri esercizi di Formalizzazione

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- ▶ Nella sequenza \mathbf{a} c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- ▶ Gli elementi di indice pari della sequenza \mathbf{a} sono dispari
- ▶ Definire il predicato $Palindroma(\mathbf{a})$, che vale \mathbf{T} se e solo la sequenza \mathbf{a} è simmetrica rispetto al suo punto centrale