

Equazioni differenziali ordinarie

$y = y(x)$ funzione
derivabile n volte

F di $n+2$ variabili

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

si dice equazione
differenziale ordinaria
di ordine n .

Es: $\cos(y') + y^3 + e^x + \ln x = 0$
eq. diff. di ordine 1.

$$e^{y''} - \log y + \operatorname{tg} x = 0$$

è un eq. diff. di ordine 2

L'incognita è la funzione $y(x)$.

$$E_s: y' = x^2$$

solution one

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$E_s: y' = y$$

soln 2. $y(x) = e^x$

$$y = e^x + C \quad \text{is a solution?}$$

$$\text{No: } y' = e^x$$

$$e^x \neq e^x + C$$

$$y(x) = k e^x \quad \text{is a solution.}$$

$$\underline{Es}: y'' = y$$

$$\underline{soln}: y(x) = e^x$$

$$y(x) = k e^x - x$$

$$y(x) = e$$

$$y' = -e^{-x}$$

$$y'' = -(-e^{-x}) = e^{-x} = y.$$

$$y(x) = k \cdot e^{-x} \text{ è soluzione}$$

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-x}$$

$$y' = k_1 e^x - k_2 e^{-x}$$

$$y'' = k_1 e^x + k_2 e^{-x} = y$$

$$\underline{E}_s : y'' = -y$$

$$y(x) = \cos x$$

$$y(x) = \sin x$$

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x .$$

Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

con $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ fissati

fisso un punto x_0 e il
valore della funzione e delle
sue derivate fino all'ordine
 $n-1$ in quel punto.

$$\underline{E_s} : \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

$$y(0) = 0$$

$$k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = 0$$

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

$$y' = -k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

$$y'(0) = -k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 1$$

due essere $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow k_2 = 1$$

soluzione

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x =$$

$$= \sin x$$

$$(k_1 = 0, k_2 = 1).$$

L'unica funzione che
risolve il problema di Cauchy

$$\bar{e} \quad y(x) = \sin x .$$

Equaz. lineari del
primo ordine.

$$y' = a(x)y + b(x)$$

a, b continue.

Es: $y' = \sin x \cdot y + \log x$

$$Es: y' = \tan x \cdot y^2 + e^x$$

non è lineare

Se $b(x) = 0$ l'equazione
si dice omogenea.

$$y' = a(x) y.$$

Siano y_1 e y_2 soluzioni
dell'omogenea.

Considero $y = y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} y' &= y_1' + y_2' = a(x)y_1 + a(x)y_2 \\ &= a(\underbrace{y_1 + y_2}_y) = a(x) \cdot y. \end{aligned}$$

la somma di 2 soluzioni
è ancora soluzione.

Se y_1 è soluzione e $k \in \mathbb{R}$

allora $y(x) = k y_1(x)$
è soluzione. Infatti

$$\begin{aligned} y' &= k y_1' = k (a(x) y_1) = \\ &= a(x) (k y_1) = a(x) y. \end{aligned}$$

Equazione completa

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Sia $A(x)$ una primitiva
di $a(x)$. Cioè $A' = a$
moltiplico l'equazione
per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} = a(x) e^{-A(x)} y(x) + b(x) e^{-A(x)}$$

$$y' e^{-A(x)} - y(x) a(x) e^{-A(x)} = b(x) e^{-A(x)}$$

$$\frac{d}{dx} (y e^{-A(x)}) = b(x) e^{-A(x)}$$

integrate

$$y e^{-A(x)} = \int b(x) e^{-A(x)} dx + C$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x) e^{-A(x)} dx + C \right)$$

tutte e sole le soluzioni
dell'equaz. $y' = a(x)y + b(x)$.

$$\underline{Es}: y' = x^2 y + x^2$$

$$a(x) = x^2 \quad b(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int a(x) dx = \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

due calcolare

$$\int e^{-A(x)} b(x) dx =$$

$$= \int e^{-\frac{x^3}{3}} x^2 dx =$$

$$x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$$

$$= \int e^{-\frac{t}{3}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} (-3) =$$

$$= -e^{-t/3} = -e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$(t = x^3)$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x) e^{-A(x)} dx + C \right) =$$

$$= e^{\frac{x^3}{3}} \left(-e^{-\frac{x^3}{3}} + C \right)$$

$$= -1 + C e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \end{cases}$$

$$y(3) = 2$$

$$y(x) = -1 + C e^{\frac{x^3}{3}}$$

devo trovare C usando
la condizione

$$2 = y(3) = -1 + C e^{\frac{3^2}{3}} =$$

$$= -1 + C e^9$$

$$\Rightarrow 2 = -1 + C e^9$$

$$3 = C e^9 \Rightarrow C = 3 \cdot e^{-9}$$

$$\Rightarrow y(x) = -1 + 3 \cdot e^{-9} e^{\frac{x^2}{3}}.$$

unica soluzione

Se invece considero

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = -1 + c e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\cancel{-1} = \cancel{-1} + c \cdot e^{\frac{3^3}{3}}$$

$$c e = 0$$

$$c = 0$$

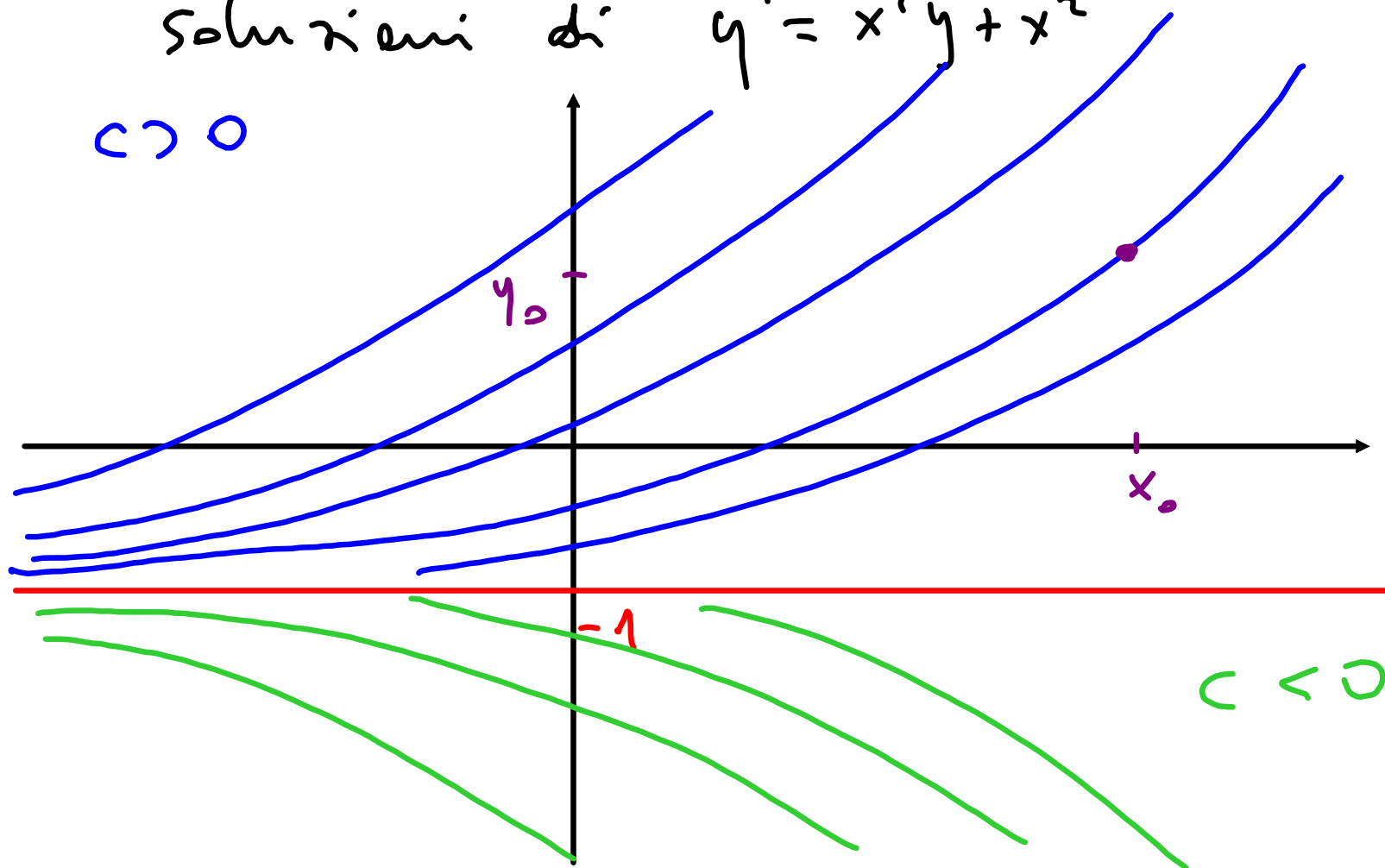
soluzione

$$y(x) = -1 \quad \forall x$$

costante.

Soluzioni di $y' = x^2 y + x^2$

$c > 0$



$c < 0$