Calcolo Numerico - Corso B: Laboratorio Lezione 3

Luca Gemignani `<luca.gemignani@unipi.it>`

13 Marzo 2019

1 Morme e Condizionamento

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} & & & \alpha \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si mostri che $\| A \|_1 = \| A \|_\infty = \| A \|_2$.
2. Si determini per quale valore di α la matrice A è singolare.
3. Per i valori di α per cui A è invertibile si determini l'inversa.
4. Si studi il condizionamento di A in norma 2. In particolare si mostri che la matrice è perfettamente condizionata per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita da

$$A = \texttt{eye}(n) + \alpha\texttt{ones}(n, 1)\texttt{ones}(1, n).$$

1. Si determini per quali valori di α la matrice A è invertibile.
2. Si mostri che per tali valori si ha

   $$A^{-1} = \texttt{eye}(n) + \beta\texttt{ones}(n, 1)\texttt{ones}(1, n).$$

   per un opportuno β da determinare.
3. Si studi il condizionamento di A in norma infinito.

Esercizio 3. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita da $a_{i,j} = \min\{i, j\}$.

1. Si mostri che A è invertibile.
2. Detta $L = (l_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice triangolare inferiore con elementi diagonali uguali ad 1, elementi sottodiagonali uguali a -1 e rimanenti elementi nulli si mostri che $T = L \cdot A$ è triangolare superiore.
3. Si determini una maggiorazione del numero di condizionamento di A in norma 1.
4. Si scriva un programma MatLab per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Se ne valuti il costo computazionale ed il comportamento numerico.