

Calcolo Numerico - Corso B:

Laboratorio

Lezione 5

Luca Gemignani <luca.gemignani@unipi.it>

20 Marzo 2019

Esercizio 1. Sia $p(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0 = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ un polinomio di grado n con zeri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Sia $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definita da

$$F = \begin{bmatrix} -p_{n-1} & \dots & \dots & -p_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}.$$

1. Si mostri che $\mathbf{v}_i = [\alpha_i^{n-1}, \dots, 1]^T$, $1 \leq i \leq n$, è autovettore di F . Si determini gli autovalori di F .
2. Utilizzando il teorema di Gerschgoring si mostri che

$$|\alpha_i| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |p_i|\right\}.$$

3. Sia $p(z) = z^{15} - \sum_{i=0}^{14} (15-i)z^i$. Rappresentare $\cup \mathcal{K}_i$. Rappresentare il cerchio di centro $\max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |p_i|\}$. Determinare le approssimazioni numeriche degli zeri di $p(z)$ utilizzando il comando `roots`.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ definita come

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è la matrice di adiacenza di un grafo non orientato con 7 vertice dove esiste un arco tra il nodo i ed il nodo j se e solo se $a_{i,j} = 1$.

1. Rappresentare il grafo.
2. Si dica se A è diagonalizzabile. Utilizzando la base di autovettori si mostri che l'autovalore più grande di A denotato con λ_1 soddisfa

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \lambda_1 \geq \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

Si deduca che $\lambda_1 > 0$.

3. Utilizzando il teorema di Gerschgoring ottenere una maggiorazione per λ_1 .
4. Supponiamo di voler assegnare un colore ad ogni nodo in modo che nodi adiacenti (connessi da un arco) non abbiano lo stesso colore. Il minimo numero di colori sufficienti si chiama numero cromatico del grafo indicato con ξ . Si dimostra che

$$\frac{n}{n - \lambda_1} \leq \xi \leq \lambda_1 + 1.$$

Determinare i possibili valori di ξ per la matrice A .