Calcolo Numerico - Corso B: Laboratorio
Lezione 7

Luca Gemignani <luca.gemignani@unipi.it>

26 Aprile 2019

Esercizio 1. Si considera l'applicazione del metodo di Jacobi per la risoluzione di sistemi triangolari.

1. Si mostri che il metodo di Jacobi applicato ad una matrice triangolare invertibile risulta convergente.
2. Si mostri il metodo di Jacobi applicato ad una matrice triangolare invertibile risulta convergente in un numero finito di passi.

Il seguente programma risolve il sistema $a\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ accettando in input la matrice a in formato eventualmente sparso il vettore $\boldsymbol{b}$ ed una tolleranza tol e restituendo in output un'approssimazione del vettore $\boldsymbol{x}$ determinata arrestando l'iterazione di Jacobi quando $\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1} \|_\infty \leq tol$.

```
function [xnew] = sparse_jacobi(a,b,tol)
v=diag(a);
n=length(v);
mv=min(abs(v));
if(mv==0)
    disp('metodo non applicabile');
    return
end
err=inf;
xold=zeros(n,1);
xnew=zeros(n,1);
it=0;
while(err>tol)
    xnew=xold+(b-a*xold)./v;
    err=norm(xnew-xold, 'inf');
```

```
    xold=xnew;
end
end
```

Si applichi il programma per la risoluzione dei problemi determinati come segue con $\alpha \in \{1, 4, 256\}$. Commentare i risultati.

```
>> a=sprand(512, 512,0.2);
>> a=triu(a);
>> alpha=1; a=a+alpha*speye(512);
>> b=rand(512,1);
```

Esercizio 2. Una matrice tridiagonale simmetrica "periodica" di ordine n ha la forma

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \beta_n \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ \beta_n & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

1. Si mostri che il metodo di Jacobi è convergente quando

$$\min_{1 \le i \le n} |\alpha_i| > 2 \max_{1 \le i \le n} |\beta_i|.$$

2. Posto $\gamma = \max_{1 \le i \le n} |\beta_i| / \min_{1 \le i \le n} |\alpha_i| < 1/2$ si determini in funzione di γ il numero K di iterazioni del metodo di Jacobi applicato per la risoluzione del sistema lineare $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sufficienti a garantire che $\| \boldsymbol{e}_K \|_\infty / \| \boldsymbol{e}_0 \|_\infty \le 2^{-32}$.

3. Per $\alpha_i = \alpha \neq 0$ e $\beta_i = \beta$ si determini il raggio spettrale della matrice di iterazione e si determini quindi per quali valori di α e β il metodo converge.

Il seguente programma risolve il sistema $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ accettando in input i vettori α e β che definiscono la matrice T, il vettore $\boldsymbol{b}$, una tolleranza *tol* ed una soglia massima *itmax* per il numero di iterazioni e restituendo in output il numero di iterazioni eseguite ed un'approssimazione del vettore $\boldsymbol{x}$ determinata arrestando l'iterazione di Jacobi quando $\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1} \|_\infty \le tol$ o $k > itmax$.

```
function [xnew, it] = trid_jacobi(alpha,beta,b, tol, itmax)
n=length(alpha);
err=inf;
xold=zeros(n,1);
xnew=zeros(n,1);
it=0;
while(err>tol && it<=itmax)
    xnew(1)=(b(1)-beta(1)*xold(2)-beta(n)*xold(n))/alpha(1);
    for k=2:n-1
```

```
        xnew(k)=(b(k)-beta(k)*xold(k+1)-beta(k-1)*xold(k-1))/alpha(k);
    end
    xnew(n)=(b(n)-beta(n-1)*xold(n-1)-beta(n)*xold(1))/alpha(n);
    err=norm(xnew-xold, 'inf');
    err
    xold=xnew;
    it=it+1;
end
end
```

Si applichi il programma con $n = 512$ $\beta_i = 1$, $\alpha_i = 2 + h$, $h > 0$, $1 \leq i \leq n$. Commentare i risultati.