LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE (A, B) - a.a. 2018-2019
Terzo Appello - 22/06/2019

Attenzione: Scrivere **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso** in alto a destra su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio che rende la formula falsa.

1. $\big((\neg P \vee \neg S) \Rightarrow (R \wedge Q)\big) \vee \neg P \;\Rightarrow\; \big((P \wedge S) \Rightarrow (Q \vee R)\big)$
2. $\big((\neg P \vee S) \Rightarrow (P \wedge Q)\big) \vee \neg P \;\Rightarrow\; \big((P \wedge S) \Rightarrow (Q \vee R)\big)$

ESERCIZIO 2
Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di costante $\mathcal{C} = \{2\}$, simboli di funzione $\mathcal{F} = \{+(-,-)\}$ e simboli predicato $\mathcal{P} = \{Pari(-), Primo(-), >(-,-), =(-,-)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutti i numeri naturali

- $\alpha(2)$ è il numero 2,
- $+(n,m)$ è la somma dei numeri naturali n ed m, cioè $+(n,m) = n+m$ usando la tradizionale notazione infissa,
- $\alpha(Pari)(n)$ è vera se e solo se il numero n è pari,
- $\alpha(Primo)(n)$ è vera se e solo se il numero n è primo,
- $\alpha(>)(n,m)$ è vera se e solo se il numero n è maggiore di m,
- $\alpha(=)(n,m)$ è vera se e solo se il numero n è uguale al numero m,

Formalizzare la congettura di Goldbach usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ rispetto all'interpretazione I:

"Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi."

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\neg\big((\exists x \,.\, P \Rightarrow R) \vee (\forall x \,.\, P \wedge \neg Q)\big) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, \neg P \vee \neg Q \vee R)$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a,b: array [0, n) of int**):

"Se il primo elemento dell'array **a** è pari, allora è uguale al numero di elementi pari dell'array **b** in posizione pari"

ESERCIZIO 5
Assumendo **a: array [0, n) of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

$\{x = 0 \;\wedge\; s = a[0] \, mod \, 2\}$

$\{\mathsf{Inv}\text{: } x \in [0,n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0,x] \mid dispari(a[i])\}\big)\}\{\text{t: } n - x\}$

```
while x < n-1 do
          x, s := x+1, s+(a[x+1] mod 2)
endw
```

$\{s = \#\{i : i \in [0,n) \mid dispari(a[i])\}\}$

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l'ipotesi di invarianza.

ESERCIZIO 6
Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$\{\, x \in [0, n-1) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1) \;\Rightarrow\; \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)\}$

```
a[x+1] := a[x] + 1
```

$\{\big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1] \;\Rightarrow\; \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)\}$