LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2018-2019
Terzo Appello - 22/06/2019 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio che rende la formula falsa.

1. $\big((\neg P \vee \neg S) \Rightarrow (R \wedge Q)\big) \vee \neg P \;\Rightarrow\; \big((P \wedge S) \Rightarrow (Q \vee R)\big)$
2. $\big((\neg P \vee S) \Rightarrow (P \wedge Q)\big) \vee \neg P \;\Rightarrow\; \big((P \wedge S) \Rightarrow (Q \vee R)\big)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{V}$, $Q = \mathbf{F}$, $R = \mathbf{F}$ e $S = \mathbf{V}$.
2. La formula è una tautologia. Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\underline{\big((\neg P \vee S) \Rightarrow (P \wedge Q)\big)} \vee \neg P$$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$), (De Morgan)$\}$

$$(P \wedge \neg S) \vee \underline{(P \wedge Q) \vee \neg P}$$

$\equiv$ $\{$(Complemento)$\}$

$$\underline{(P \wedge \neg S) \vee \neg P} \vee Q$$

$\equiv$ $\{$(Complemento)$\}$

$$\underline{\neg P \vee \neg S} \vee Q$$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$$\underline{\neg(P \wedge S) \vee Q}$$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$$(P \wedge S) \Rightarrow \underline{Q}$$

$\Rightarrow$ $\{$(Intro-$\vee$), occ. pos.$\}$

$$(P \wedge S) \Rightarrow (Q \vee R)$$

ESERCIZIO 2

Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di costante $\mathcal{C} = \{2\}$, simboli di funzione $\mathcal{F} = \{+(-,-)\}$ e simboli predicato $\mathcal{P} = \{Pari(-), Primo(-), >(-,-), =(-,-)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutti i numeri naturali

- $\alpha(2)$ è il numero 2,
- $+(n,m)$ è la somma dei numeri naturali n ed m, cioè $+(n,m) = n + m$ usando la tradizionale notazione infissa,
- $\alpha(Pari)(n)$ è vera se e solo se il numero n è pari,
- $\alpha(Primo)(n)$ è vera se e solo se il numero n è primo,
- $\alpha(>)(n,m)$ è vera se e solo se il numero n è maggiore di m,
- $\alpha(=)(n,m)$ è vera se e solo se il numero n è uguale al numero m,

Formalizzare la congettura di Goldbach usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ rispetto all'interpretazione I:

"Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\big(\forall x\,.\,(Pari(x) \wedge >(x,2)) \;\Rightarrow\; (\exists y\,.\,(\exists z\,.\,Primo(y) \wedge Primo(z) \wedge x = y + z))\big)$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\neg\big((\exists x\,.\,P \Rightarrow Q) \vee (\forall x\,.\,P \wedge \neg Q)\big) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\,.\,\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Prima di utilizzare la Skolemizzazione, si applica De Morgan:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg\big((\exists x\,.\,P \Rightarrow R) \vee (\forall x\,.\,P \wedge \neg Q)\big) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\,.\,\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\exists x\,.\,P \Rightarrow R) \wedge \neg(\forall x\,.\,P \wedge \neg Q) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,\neg(\neg P \vee \neg Q \vee R)) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg(P \Rightarrow R)) \wedge (\exists x\,.\,\neg(P \wedge \neg Q)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,(P \wedge Q \wedge \neg R))
\end{array}$$

Adesso, utilizzando la regola della **Skolemizzazione** è sufficiente dimostrare che:

$$(\forall x\,.\,\neg(P \Rightarrow R)) \wedge (\exists x\,.\,\neg(P \wedge \neg Q)) \wedge \neg(P(a) \wedge \neg Q(a)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,(P \wedge Q \wedge \neg R))$$

con a costante nuova. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x\,.\,\neg(P \Rightarrow R)) \wedge \underline{(\exists x\,.\,\neg(P \wedge \neg Q))} \wedge \neg(P(a) \wedge \neg Q(a)) \\
\Rightarrow & \{(\text{Sempl-}\wedge),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & (\forall x\,.\,\underline{\neg(P \Rightarrow R)}) \wedge \underline{\neg(P(a) \wedge \neg Q(a))} \\
\equiv & \{(\text{Elim-} \Rightarrow),(\text{De Morgan})\} \\
 & \underline{(\forall x\,.\,(P \wedge \neg R))} \wedge (\neg P(a) \vee Q(a)) \\
\Rightarrow & \{(\text{Elim-}\forall),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & \underline{P(a)} \wedge \neg R(a) \underline{\wedge(\neg P(a) \vee Q(a))} \\
\equiv & \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{P(a) \wedge \neg R(a) \wedge Q(a)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Intro-}\exists),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & (\exists x\,.\,P \wedge \neg R \wedge Q)
\end{array}$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a,b: array [0, n) of int**):

"Se il primo elemento dell'array **a** è pari, allora è uguale al numero di elementi pari dell'array **b** in posizione pari"

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$Pari(\mathbf{a}[0]) \;\Rightarrow\; \mathbf{a}[0] = \#\{i : i \in [0,n) \wedge Pari(i) \mid Pari(\mathbf{b}[i])\}$$

ESERCIZIO 5
Assumendo **a: array [0, n) of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

$\{x = 0 \;\wedge\; s = a[0]\, mod\, 2\}$
$\{\mathsf{Inv}\text{: } x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big)\}\{\text{t: } n - x\}$

```
while x < n-1 do
          x, s := x+1, s+(a[x+1] mod 2)
     fi
endw
```

$\{s = \#\{i : i \in [0, n) \mid dispari(a[i])\}\}$

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big)$
Funzione di terminazione $t : n - x$

1. **Ipotesi di Invarianza**:

$\{x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big) \;\wedge\; x < n - 1\}$
`x, s := x+1, s+(a[x+1] mod 2)`
$\{x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big) \;\wedge\; def(x < n - 1)\ \}$

2. **Ipotesi di Progresso**:

$\{x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big) \;\wedge\; x < n - 1 \;\wedge\; n - x = V\}$
`x, s := x+1, s+(a[x+1] mod 2)`
$\{n - x < V\}$

Dimostriamo l'ipotesi di invarianza applicando la regola dell'**Assegnamento Multiplo**. Quindi dobbiamo verificare che

$$x \in [0, n) \;\wedge\; \big(s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\big) \;\wedge\; x < n - 1$$
$$\Rightarrow$$
$$def(x + 1) \wedge def(a[x + 1]\, mod\, 2) \;\wedge\; Inv[^{x+1, s+(a[x+1]\, mod\, 2)}/_{x,s}] \;\wedge\; def(x + 1 < n - 1)$$

Partiamo dalla conseguenza

$\underline{def(x + 1) \wedge def(a[x + 1]\, mod\, 2)} \;\wedge\; Inv[^{x+1, s+(a[x+1]\, mod\, 2)}/_{x,s}] \;\wedge\; \underline{def(x + 1 < n - 1)}$

$\equiv$ $\{$definizione di $def\}$

$\underline{x + 1 \in [0, n)} \wedge Inv[^{x+1, s+(a[x+1]\, mod\, 2)}/_{x,s}]$

$\equiv$ $\{\textbf{Ip}\text{: } x \in [0, n), x < n - 1\}$

$\underline{Inv[^{x+1, s+(a[x+1]\, mod\, 2)}/_{x,s}]}$

$\equiv$ $\{$definizione di Inv, sostituzione$\}$

$\underline{x + 1 \in [0, n)} \;\wedge\; \big(s + (a[x + 1]\, mod\, 2) = \#\{i : i \in [0, x + 1] \mid dispari(a[i])\}\big)$

$\equiv$ $\{\textbf{Ip}\text{: } x \in [0, n), x < n - 1\}$

$s + (a[x + 1]\, mod\, 2) = \underline{\#\{i : i \in [0, x + 1] \mid dispari(a[i])}\}$

Concludiamo applicando la legge dell'intervallo della cardinalità alla formula sottolineata, considerando i due casi possibili: $pari(a[x + 1])$ e $dispari(a[x + 1])$.

[Caso $pari(a[x + 1])$**]**

$s + (a[x + 1]\, mod\, 2) = \underline{\#\{i : i \in [0, x + 1] \mid dispari(a[i])}\}$

$\equiv$ $\{$interv-#, **Ip:** $pari(a[x + 1])\}$

$s + (a[x + 1]\, mod\, 2) = \underline{\#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])}\}$

$\equiv$ $\{\textbf{Ip}\text{: } s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\}$

$s + (a[x + 1]\, mod\, 2) = s$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $pari(a[x + 1])$, quindi $a[x + 1]\, mod\, 2 = 0\}$ $\}$

T

[**Caso** $dispari(a[x+1])$]

$$
\begin{array}{ll}
 & s + (a[x+1]\, mod\, 2) = \underline{\#\{i : i \in [0, x+1] \mid dispari(a[i])\}} \\
\equiv & \{\text{interv-}\#,\ \textbf{Ip:}\ dispari(a[x+1])\} \\
 & s + (a[x+1]\, mod\, 2) = \underline{\#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}} + 1 \\
\equiv & \{\textbf{Ip}:\ s = \#\{i : i \in [0, x] \mid dispari(a[i])\}\} \\
 & s + (a[x+1]\, mod\, 2) = s + 1 \\
\equiv & \{\textbf{Ip:}\ dispari(a[x+1]),\ \text{quindi}\ a[x+1]\, mod\, 2 = 1\}\ \} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$$\{\ x \in [0, n-1) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1) \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)\}$$

```
a[x+1] := a[x] +1
```

$$\{\big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1] \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)\}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando la regola dell' **Aggiornamento Selettivo** dobbiamo verificare che:

$$x \in [0, n-1) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1) \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big) \ \Rightarrow \ def(x+1)\ \wedge\ def(\mathtt{a}[x]+1)\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}]$$

dove

- $\mathtt{b} = \mathtt{a}[^{\mathtt{a}[x]+1}/_{x+1}]$,
- $P = \big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1] \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)$.

Partiamo dalla conseguenza

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{def(x+1)\ \wedge\ def(\mathtt{a}[x]+1)}\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}] \\
\equiv & \{\text{definizione di } def\} \\
 & \underline{x \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})}\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}] \\
\equiv & \{\textbf{Ip}:\ x \in [0, n-1)\ \wedge\ dom(\mathtt{a}) = [0, n)\} \\
 & \underline{P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}]} \\
\equiv & \{\text{sostituzione}\} \\
 & \underline{\big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1] \ \Rightarrow\ \mathtt{b}[i] \geq \mathtt{b}[i-1]\big)} \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall),\ \textbf{Ip}:\ x \geq 0\} \\
 & \underline{\big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1) \ \Rightarrow\ \mathtt{b}[i] \geq \mathtt{b}[i-1]\big)}\ \wedge\ \underline{\big(\mathtt{b}[x+1] \geq \mathtt{b}[x]\big)} \\
\equiv & \{\text{definizione di } \mathtt{b}\} \\
 & \underline{\big(\forall i \,.\, i \in (0, x+1) \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\big)}\ \wedge\ \big(\mathtt{a}[x]+1 \geq \mathtt{a}[x]\big) \\
\equiv & \{\textbf{Ip}:\ \forall i \,.\, i \in [0, x+1) \ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] \geq \mathtt{a}[i-1]\ \} \\
 & \underline{\mathtt{a}[x]+1 \geq \mathtt{a}[x]} \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$