LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2018-2019
Quarto Appello - 9/07/2019 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio che rende la formula falsa.

1. $\big(P \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow \neg(R \wedge Q) \wedge Q)\big) \quad \Rightarrow \quad (P \Rightarrow R)$
2. $\big(P \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow \neg(R \wedge Q) \wedge S)\big) \quad \Rightarrow \quad (P \Rightarrow R)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia. Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$
\begin{array}{ll}
 & P \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow \underline{\neg(R \wedge Q)} \wedge Q) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & P \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow \underline{(\neg R \vee \neg Q) \wedge Q}) \\
\equiv & \{(\text{Complemento})\} \\
 & P \Rightarrow \underline{\neg(Q \Rightarrow (\neg R \wedge Q))} \\
\equiv & \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\} \\
 & P \Rightarrow (Q \wedge \underline{\neg(\neg R \wedge Q))} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & P \Rightarrow (\underline{Q \wedge (R \vee \neg Q))} \\
\equiv & \{(\text{Complemento})\} \\
 & P \Rightarrow (\underline{Q \wedge R)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Elim-}\wedge), \text{ occ. pos.}\} \\
 & P \Rightarrow R
\end{array}
$$

2. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{V}$, $Q = \mathbf{V}$, $R = \mathbf{F}$ e $S = \mathbf{F}$.

ESERCIZIO 2
Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di costante $\mathcal{C} = \{g, a\}$, i simboli predicato $\mathcal{P} = \{A(-,-), PS(-,-),\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le persone

- $\alpha(g)$ è la persona Gianni,
- $\alpha(a)$ è la persona Anna,
- $\alpha(A)(p,q)$ è vera se e solo se la persona p è amica della persona q,
- $\alpha(PS)(p,q)$ è vera se e solo se la persona p è più studiosa della persona q,

Formalizzare il seguente enunciato usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ rispetto all'interpretazione I:

"Se Gianni è più studioso di Anna, allora almeno un amico di Gianni è più studioso di tutti gli amici di Anna ."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$PS(g,a) \Rightarrow \big(\exists x \,.\, A(x,g) \wedge (\forall y \,.\, A(y,a) \Rightarrow PS(x,y))\big)$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\big((\forall x \,.\, Q \vee R \Rightarrow R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, P \vee Q \Rightarrow R) \;\wedge\; (\exists x \,.\, R \Rightarrow P)\big) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q \Rightarrow P)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Adesso, utilizzando la regola della **Skolemizzazione** è sufficiente dimostrare che:

$$\big((\forall x \,.\, Q \vee R \Rightarrow R) \wedge (\exists x \,.\, P \vee Q \Rightarrow R) \wedge (\exists x \,.\, R \Rightarrow P) \wedge (R(a) \Rightarrow P(a))\big) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, Q \Rightarrow P)$$

con a costante nuova. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x \,.\, Q \vee R \Rightarrow R) \wedge \underline{(\exists x \,.\, P \vee Q \Rightarrow R) \wedge (\exists x \,.\, R \Rightarrow P)} \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\Rightarrow & \{(\text{Sempl-}\wedge),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & (\forall x \,.\, Q \vee R \Rightarrow R) \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\Rightarrow & \{(\text{Elim-}\forall),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & \underline{(Q(a) \vee R(a) \Rightarrow R(a))} \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\equiv & \{(\text{Elim-} \Rightarrow),(\text{De Morgan})\} \\
 & \underline{(\neg Q(a) \wedge \neg R(a)) \vee R(a))} \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\equiv & \{(\text{Complemento})\} \\
 & (\neg Q(a) \vee R(a)) \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\equiv & \{(\text{Elim-} \Rightarrow)\} \\
 & (Q(a) \Rightarrow R(a)) \wedge (R(a) \Rightarrow P(a)) \\
\equiv & \{(\text{Trans-} \Rightarrow)\} \\
 & Q(a) \Rightarrow P(a) \\
\Rightarrow & \{(\text{Intro-}\exists),\ \text{occor. pos.}\} \\
 & (\exists x \,.\, Q \Rightarrow P)
\end{array}
$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a,b: array [0, n) of int**):

"Se 3 compare in posizione pari nell'array **a**, allora 3 compare almeno tre volte nell'array **b**"

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\exists i \,.\, i \in [a,n) \wedge Pari(i) \wedge a[i] = 3) \;\Rightarrow\; \#\{i : i \in [0,n) \mid b[i] = 3\} \geq 3$$

ESERCIZIO 5
Assumendo **a, b: array [0, n) of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

$\{c = 0 \;\wedge\; x = 0\}$
$\{\mathsf{Inv}\colon\ x \in [0,n] \;\wedge\; \big(c = \#\{j : j \in [0,x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}\big)\}\{\text{t: } n - x\}$

```
while x < n do
    if (x mod 2 = 0 ∧ a[x] * a[x] > b[x])
```

```
            then c, x := c+1, x+1
            else x := x+1
      fi
endw
```

$\{(c = \#\{j : j \in [0, n) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\})\}$

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : x \in [0, n] \ \wedge \ (c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\})$
Funzione di terminazione $t : n - x$

1. **Ipotesi di Invarianza**:

   $\{x \in [0, n] \ \wedge \ (c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}) \wedge x < n\}$
   ```
       if (x mod 2 = 0 ∧ a[x] * a[x] > b[x])
           then c, x := c+1, x+1
           else x := x+1   fi
   ```
   $\{x \in [0, n] \ \wedge \ (c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}) \wedge def(x < n) \ \}$

2. **Ipotesi di Progresso**:

   $\{x \in [0, n] \ \wedge \ (c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}) \ \wedge \ x < n \ \wedge \ n - x = V\}$
   ```
       if (x mod 2 = 0 ∧ a[x] * a[x] > b[x])
           then c, x := c+1, x+1
           else x := x+1   fi
   ```
   $\{n - x < V\}$

Dimostriamo l'ipotesi di invarianza applicando la regola del **Condizionale**. Quindi dobbiamo verificare che

(5.1.1) $Inv \wedge x < n \ \Rightarrow \ def(x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ a[x] * a[x] > b[x])$

(5.1.2) $\{Inv \wedge x < n \wedge (x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ a[x] * a[x] > b[x])\}$ `c, x := c+1, x+1` $\{Inv \wedge def(x < n)\}$

(5.1.3) $\{Inv \wedge x < n \wedge \neg(x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ a[x] * a[x] > b[x])\}$ `x := x + 1` $\{Inv \wedge def(x < n)\}$

(5.1.1) Abbiamo che

$def(x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ a[x] * a[x] > b[x])$

$\equiv$ {definizione di *def*}

$x \in dom(a) \wedge x \in dom(b) \wedge 2 \neq 0$

$\equiv$ {**Ip**: $dom(a) = dom(b) = [0, n), x \in [0, n], x < n$}

T

(5.1.2) Per dimostrare la tripla applichiamo la regola dell' **Assegnamento Multiplo** e ci riduciamo a dimostrare

$$Inv \ \wedge \ x < n \ \wedge \ x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ a[x] * a[x] > b[x] \ \Rightarrow$$

$$def(c + 1) \ \wedge \ def(x + 1) \ \wedge \ \big(Inv \wedge def(x < n)\big)[^{c+1, x+1}/_{c,x}]$$

Partiamo dalla conseguenza

$def(c + 1) \wedge def(x + 1) \wedge \big(Inv \wedge def(x < n)\big)[^{c+1, x+1}/_{c,x}]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di def}

$\underline{x + 1 \in [0, n]} \ \wedge \ (c + 1 = \#\{j : j \in [0, x + 1) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\})$

$\equiv$ {**Ip**: $x \in [0, n], x < n$}

$$
\begin{aligned}
& c+1 = \underline{\#\{j : j \in [0, x+1) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}} \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\#),\ \textbf{Ip}\colon\ x \ mod\ 2 = 0 \wedge\ a[x] * a[x] > b[x]\ \} \\
& c+1 = \underline{\#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}} + 1 \\
\equiv \quad & \Big\{\textbf{Ip}\colon\ c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}\Big\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

(5.1.3) Per dimostrare la tripla applichiamo la regola dell' **Assegnamento** e ci riduciamo a dimostrare

$$
Inv\ \wedge\ x < n\ \wedge\ \neg(x\ mod\ 2 = 0\ \wedge\ a[x] * a[x] > b[x])\ \Rightarrow
$$

$$
def(x+1)\ \wedge\ \big(Inv\ \wedge\ def(x < n)\big)[^{x+1}/_x]
$$

Partiamo dalla conseguenza

$$
\begin{aligned}
& def(x+1) \wedge \big(Inv \wedge def(x < n)\big)[^{x+1}/_x] \\
\equiv \quad & \{\text{sostituzione, definizione di } def\} \\
& \underline{x+1 \in [0, n]}\ \wedge\ \big(c = \#\{j : j \in [0, x+1) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}\big) \\
\equiv \quad & \{\textbf{Ip}\colon\ x \in [0, n], x < n\} \\
& c = \underline{\#\{j : j \in [0, x+1) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}} \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\#),\ \textbf{Ip}\colon\ \neg(x\ mod\ 2 = 0 \wedge\ a[x] * a[x] > b[x])\ \} \\
& c = \underline{\#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}} \\
\equiv \quad & \Big\{\textbf{Ip}\colon\ \big(c = \#\{j : j \in [0, x) \mid pari(j) \wedge a[j]^2 > b[j]\}\big)\Big\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int**):

$\{\ x \in [0, n-1) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [0, x]\ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] = i^2\big)\}$

```
a[x+1] := a[x] + 2*x + 1
```

$\{\big(\forall i \,.\, i \in [0, x+1]\ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] = i^2\big)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando la regola dell' **Aggiornamento Selettivo** dobbiamo verificare che:

$$
\begin{aligned}
& x \in [0, n-1)\ \wedge\ \big(\forall i \,.\, i \in [0, x]\ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] = i^2\big) \qquad \Rightarrow \\
& \qquad def(x+1)\ \wedge\ def(\mathtt{a}[x] + 2 * x + 1)\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}]
\end{aligned}
$$

dove

- $\mathtt{b} = \mathtt{a}[^{\mathtt{a}[x]+2*x+1}/_{x+1}]$,
- $P = \big(\forall i \,.\, i \in [0, x+1]\ \Rightarrow\ \mathtt{a}[i] = i^2\big)$.

Partiamo dalla conseguenza

$$
\begin{aligned}
& \underline{def(x+1)\ \wedge\ def(\mathtt{a}[x] + 2 * x + 1)}\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}] \\
\equiv \quad & \{\text{definizione di } def\} \\
& \underline{x \in dom(\mathtt{a})\ \wedge\ x+1 \in dom(\mathtt{a})}\ \wedge\ P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}] \\
\equiv \quad & \{\textbf{Ip}\colon\ x \in [0, n-1)\ \wedge\ dom(\mathtt{a}) = [0, n)\}
\end{aligned}
$$

$\underline{P[^{\mathtt{b}}/_{\mathtt{a}}]}$

$\equiv$ $\{$sostituzione$\}$

$\underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0, x+1] \;\Rightarrow\; \mathtt{b}[i] = i^2\big)}$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-$\forall$), **Ip**: $x \geq 0\}$

$\underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0, x+1) \;\Rightarrow\; \mathtt{b}[i] = i^2\big)} \;\wedge\; \underline{\big(\mathtt{b}[x+1] = (x+1)^2\big)}$

$\equiv$ $\{$definizione di $\mathtt{b}\}$

$\underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0, x+1) \;\Rightarrow\; \mathtt{a}[i] = i^2\big)} \;\wedge\; \big(\mathtt{a}[x] + 2 * x + 1 = (x+1)^2\big)$

$\equiv$ $\big\{$**Ip**: $(\forall i \,.\, i \in [0, x+1) \;\Rightarrow\; \mathtt{a}[i] = i^2)$ $\big\}$

$\underline{\mathtt{a}[x]} + 2 * x + 1 = (x+1)^2$

$\equiv$ $\big\{$**Ip**: $(\forall i \,.\, i \in [0, x+1) \;\Rightarrow\; \mathtt{a}[i] = i^2)$, $x \in [0, x+1)$ $\big\}$

$x^2 + 2 * x + 1 = (x+1)^2$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

T