Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione della IX settimana

Domanda 1 La successione $a_n = \left(\sin \sqrt[4]{|\sin n|}\right)^{4n}$

A) non ha limite B) tende a 1 C) tende a 0 D) diverge a $+\infty$

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{n^3 \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos n}{n^4+1}$

A) non è limitata né inferiormente né superiormente B) ha sia massimo che minimo

C) non ha limite ma è limitata D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Domanda 3 la successione

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) n^4$$

A) diverge a $-\infty$ B) tende a $\dfrac{1}{6}$ C) non ha limite D) tende a 0

Domanda 4 L'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : -2n^3 + 2n^2 + n > -2\}$

A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo

C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

Domanda 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!} =$$

A) $+\infty$ B) $e^{\frac{9}{4}}$ C) 0 D) $\dfrac{3}{2}$

Domanda 6 La funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^{|x|} t \sin t \, dt$, nel punto $x = 0$

A) non è continua B) ha un punto angoloso C) è derivabile D) ha un punto di cuspide

Domanda 7 Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{(\sin x)^2} \frac{t}{1+t^4}\, dt$. Allora risulta che

A) F ha un punto di massimo locale per $x = 0$ B) F ha un punto di minimo locale per $x = 1$

C) F ha un punto di massimo locale per $x = 1$ D) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

Domanda 8 Sia $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$ allora

A) $F''(x) = \int_1^{x^2} 2te^{t^2+1}\, dt$ B) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$ C) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$ D)$F''(x) = 2x \int_1^{x} e^{t^2+1}\, dt$

Domanda 9 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\sin(t^2))\, dt =$

A) 0 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $+\infty$ D) non esiste

Domanda 10 La funzione $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_2^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt & \text{se } x > 2 \\ x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

A) è continua ma non derivabile in $x = 2$ B) è derivabile in $x = 2$

C) non è continua in $x = 2$ D) è derivabile ma non è continua in $x = 2$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione della IX settimana

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{\log(n!)}{n^2}$$

Soluzione

Utilizzando la maggiorazione $n! \le n^n$ si ottiene che

$$0 \le \frac{\log(n!)}{n^2} \le \frac{\log(n^n)}{n^2} = \frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, il teorema dei carabinieri ci garantisce che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Dato che la successione è a termini positivi possiamo applicare il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\,\frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\,\frac{(n+1)^{2n}\,(n+1)^2}{n^{2n}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}(n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to \frac{e^2}{4} > 1.$$

Quindi il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima una primitiva della funzione $x\cos^2 x$ integrando per parti. Integreremo $\cos x$ e deriveremo $x\cos x$.

$$\int x\cos^2 x\,dx = \int(\cos x)\,(x\cos x)\,dx = \sin x\,x\cos x - \int \sin x(\cos x - x\sin x)\,dx$$

$$= x\cos x\sin x - \int\cos x\sin x\,dx + \int x\sin^2 x\,dx = x\cos x\sin x - \int\frac{\sin(2x)}{2}\,dx + \int x(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= x\cos x\sin x - \frac{1}{2}\,\frac{-\cos(2x)}{2} + \int x\,dx - \int x\cos^2 x\,dx = x\cos x\sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2} - \int x\cos^2 x\,dx.$$

Avendo ottenuto di nuovo l'integrale di partenza con il segno opposto, possiamo portarlo al primo membro ottenendo, a meno di costanti additive,

$$2\int x\cos^2 x\,dx = x\cos x\sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Allora risulta

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x\cos x\sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}.$$

Per calcolare l'integrale definito basta applicare il teorema di Torricelli ottenendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx = \left[\frac{x\cos x\sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0}{8} + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{16} - \left(0 - \frac{1}{8} + 0\right) = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8}.$$