Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica A-B

A.A. 2018-2019

E.Chiodaroli, C.Grisanti, V.M. Tortorelli

X settimana, novembre-dicembre: decimo foglio di complementi

---

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matetmatica”

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matetmatica”

[FM ] A.Faedo, L.Modica, “Analisi I, lezioni”

[MS] P.Marcellini, C. Sbordone, “Elementi di Analisi Matematica uno”

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, “Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile”

Con:

$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,

$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

Altri esercizi sono nelle raccolte di testi di esame degli anni passati reperibili in
http://pagine.dm.unipi.it/grisanti/didattica/compiti-desame/analisi-matematica/informatica/

---

Complementi su numeri complessi ed equazioni differenziali

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

---

## LE PRINCIPALI FORMULE TRIGONOMETRICHE

---

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$

Per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\quad \sin\alpha < \alpha, \quad \cos\alpha \leq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1,$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \ \sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \ \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\arcsin x = \alpha, x \in [-1,1]$ sta per $\sin\alpha = x$ e $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$

$\arccos x = \alpha, x \in [-1,1]$ sta per $\cos\alpha = x$ e $\alpha \in [0,\pi],$

$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty,\infty)$ sta per $\tan\alpha = x$ e $\alpha \in ]-\pi/2, \pi/2[,$

$\sin x = \sin x_0$ equivale a $x = x_0 + 2k\pi$ o $x = \pi - x_0 + 2k\pi = -x_0 + (2k+1)\pi,$

$\cos x = \cos x_0$ equivale a $x = \pm x_0 + 2k\pi,$

$\tan x = \tan x_0$ equivale a $x = x_0 + k\pi.$

---

# COMPENDIO SU I NUMERI COMPLESSI

• Con sistema dei numeri complessi si intende l'uso della regola di calcolo $i^2 = -1$, ove $i$ è una costante *non reale*, con le espressioni $a + ib$ ove $a \in \mathbf{R}$ , $b \in \mathbf{R}$: *si aggiunge cioè una soluzione dell'equazione* $x^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni in $\mathbf{R}$. Come si vedrà sotto, facendo ciò accade in particolare che si aggiungano le radici di ogni grado di ogni numero reale e gli "zeri" a ogni polinomio con coefficienti reali.

I numeri reali $a$ si identificano con i numeri complessi del tipo $a + i0$. Quelli del tipo $0 + ib$ indicati con $ib$ si chiamano numeri *immaginari puri.*

Se $a + ib = z$ è un numero complesso $\mathcal{R}e z = a$ ed $\mathcal{I}m z = b$ si dicono rispettivamente parte reale e parte immaginaria di $z$.

Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi quelli dei *polinomi a coefficienti reali* nella variabile $i$, solo che nei calcoli si usa la regola data per ridursi sempre a polinomi di *primo grado*:

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y);$$

$$(a + ib)(x + iy) = ax + aiy + ibx + ibiy = ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Quindi ogni numero complesso $a + ib$ nonullo ha un reciproco $\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+ib}$, e il prodotto di due numeri complessi non nulli è non nullo (si possono semplificare le eguaglianze).

Considerando l'insieme dei numeri complessi con tali operazioni si parla di *campo* dei numeri complessi, che si indica con $\mathbf{C}$. Quindi con i numeri complessi si fanno tutte le operazioni che si fanno con i numeri reali: si dice che i numeri complesssi sono *un'estensione* dei numeri reali come sistema con addizione e moltiplicazione, commutative e distributive, unità ed elemento neutro, inverso e opposto.

Si osserva che non si può estendere ai numeri complessi la relazione d'ordine che vi è tra i numeri reali in maniera coerente rispetto all'addizione e alla moltiplicazione ($0 = 1 - 1 = 1 + i^2 > i^2 > 0$ ma un quadrato è sempre non negativo).

• Spesso $\mathbf{C}$ si identifica con $\mathbf{R^2}$: $a + ib \sim (a, b)$ e ciò porta a interpretazioni geometriche: per esempio la somma di numeri complessi corrisponde alla somma di vettori (regola del parallelogramma).
Fissato $w = \alpha + i\beta$ *diverso da* 0, si considera la funzione $a + ib = z \to zw$ essa determina una funzione lineare da $\mathbf{R^2}$ in $\mathbf{R^2}$ di tipo particolare:

$$zw = a\alpha - b\beta + i(b\alpha + a\beta) \sim \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ \\ b\alpha + a\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix}$$

la matrice associata è qualla di una fuznione lineare che conserva gli angoli. In altri termini le trasformazioni del piano in se che conservano gli angoli tra curve sono rappresentate da trasformazionida $\mathbf{C}$ in se del tipo $z \mapsto wz + v$.

Il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ si indica con $\overline{z}$ ed è $x - iy$ (simmetrico rispetto all'asse orizzontale). Per il prodotto tra $z = a + ib$ e il coniugato di $w = \alpha + i\beta$ si osserva c

$$z\overline{w} = (a + ib)(\alpha - i\beta) = a\alpha + b\beta + i(b\alpha - a\beta) = (a, b)\bullet(\alpha, \beta) \ - \ i\det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}$$

Il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ è la distanza dall'origine del corrispondente punto nel piano cartesiano $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si indica con $|z|$. Si ha:

$$z \in \mathbf{R} \text{ se e solo se } \overline{\mathbf{z}}\mathbf{z}; \quad \overline{\mathbf{z} + \mathbf{w}} = \overline{\mathbf{z}} + \overline{\mathbf{w}}; \quad \overline{\mathbf{zw}} = \overline{\mathbf{zw}}$$

$$|zw| = |z||w|, \ |z + w| \leq |z| + |w|; \quad |z|^2 = z\overline{z}, \ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

**Convergenza** La convergenza di numeri complessi è quella delle coppie di numeri reali associati: in particolare $z_n \to z$ è $|z_n - z| \to 0$. Quindi una successione o funzione a valori complessi converge ad un limite $L \in \mathbf{C}$ se e solo se le due successioni o le funzioni date delle parti reali ed immaginarie convergono rispettivamentea $\mathcal{R}e L$ e $\mathcal{I}m L$.

**Forma trigonometrica** Considerando le coordinate polari nel piano ogni numero complesso si scrive nella forma $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. L'angolo $\varphi$ non è individuato se non a meno di multipli di $2\pi$: *e.g.* se $a > 0$, $b > 0$ allora $a+ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\ \text{artan}\frac{b}{a} + \sin\ \text{artan}\frac{b}{a})$. Appunto $\rho$ si dirà modulo di un numero complesso, e $\varphi \in [0; 2\pi[$ argomento principale.

Dalle formule di addizione se $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha:

$$\textbf{(*)}zw = \rho r(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$$

**Radici** $n^e$ Quindi ogni numero complesso $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ha esattamente $n$ radici $n^e$ complesse

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}) \ldots z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

Le radici $n^e$ di 1 sono quindi i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza untitaria.

**Forma esponenziale** Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che **(*)** il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in $[0; 2\pi[$ si definisce $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{\alpha}e^{i\beta}$ constatando che ha le stesse regole di calcolo dell'esponenziale!

Si ha inoltre $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Si hanno a disposizione tutti gli srumenti (una funzione continua in due variabili assume valori di massimo e minimo su rettangoli chiusi) per dare una dimostrazione del seguente teorema (la si omette).

**Teorema 1** FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado esattamente $n$

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

è prodotto di termini del tipo $(z-w)^k$ per $a_n$.
I numeri $w$ sono tutte e sole le radici del polinomio,
i numeri $k$ sono le rispettive molteplicità e la loro somma è $n$.
Poichè un polinomio a coefficienti reali se ha come radice $w = a+ib$ ha anche come radice $a-ib$ si ha che un polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di termini del tipo $(x-c)^k$, $((x-a)^2+b^2)^h = (x-(a+ib))^h(x-(a-ib))^h$, ove $c$ sono le radici reali e la somma degli $k$ e dei $2h$ è il grado del polinomio.

## Integrali

- Una funzione $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ si identifica con la funzione $\tilde{g} : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$: $\tilde{g}(a,b) = g(a+ib)$.

  Una funzione $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ si identifica con il cammino $\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R^2}$: $\tilde{g}(t) = (\alpha(t), \beta(t)$.

  Un fuzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(a+ib) = h(a+ib) + ik(a+ib)$ si identifica con $\tilde{f} : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$: $\tilde{f}(a,b) = (h(a,b), k(a,b))$.

  Una funzione a valori o definita sui complessi sarà *continua* se e solo se lo è la funzione associata. Un *cammino* a valori complessi sarà *derivabile* se e solo se lo è il cammino associato cioè se e solo se lo sono le due funzioni che danno la parte reale ed immaginaria.

  Dato un cammino $\gamma : [A,B] \to \mathbf{C}$ , $\gamma = \alpha + i\beta$ $C^1$ a tratti, e una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f \sim (h,k)$ si definisce l'integrale di $f$ su $\gamma$:

$$\int_{\gamma} f(z)dz =: \int_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

esso è eguale al numero complesso dato dalla coppia degli integrali su $\gamma$ dei vettori $(h,-k)$ e $(k,h)$:

$$\int_A^B [h(\gamma(t))\alpha'(t) - k(\gamma(t))\beta'(t)]\,dt + i\int_A^B [h(\gamma(t))\beta'(t) + k(\gamma(t))\alpha'(t)]\,dt$$

---

# RUDIMENTI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

**"Quadratura" semplice** Se $f : A \to \mathbf{R}$ è continua su $A$ segmento in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

**Variabili separabili** Se $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su $A$ e su $B$, segmenti in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare le $y \in C^1(I)$, $I$ segmento incluso in $A$, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

*Procedimento euristico*
i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$
ii- si considera $\Gamma$ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J \subset B$
iii- si considera $F$ primitiva di $f$
iv- si scelgono $I \subset A$ e $c \in \mathbf{R}$ in modo che $c + F(I) \subset \Gamma(J)$
l'eventuale soluzione deve verificare l'equazione $\Gamma(y(t)) = F(t) + c$, $t \in I$

*Il procedimento inverso* Considerando quindi
i- un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che $g$ si annulli solo agli estremi di$J$,
ii-una generica $\Gamma$ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J$ (essendo $g$ continua non cambia segno e $\Gamma$ sarà invertibile su $J$)
iii-una generica primitiva $F$ di $f$ su $A$
iv- determinando di conseguenza $I$, $c$ t.c. $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$, l'intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$, si ha che

$$\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$$

è una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta,\ t \in I$.

*Problema di Cauchy 1:* Quindi se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende $J$ in modo che $y_0 \in J$ e $g$ non si annulli se non agli estremi di $J$, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^{p} \frac{du}{g(u)},\ p \in J$
- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, $I$ per cui $t_0 \in I$ e $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$ è ben definita ed è soluzione, e tale $y$ è a *valori in* $J$: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per il problema, e che la soluzione è *unica finchè non annulla* $g$.

( *Problema di Cauchy 2:* Se $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare $g$ se non agli estremi di $A$: infatti se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad $\alpha$ o a $\beta$ da cui $\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma $f$ ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in $A$ essendo continua.

*Problema di Cauchy 3:* Analogamente se $y_0$ è uno *zero isolato* di $g$ e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a $y_0$ è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.)

**Equazioni lineari del primo ordine** $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con $f$ e $a$ funzioni continue su $I$ intervallo.
*Omogenea* $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è $u(t) = ce^{\alpha(t)}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
*Soluzioni* Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le soluzioni sono

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int^{t} e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t}^{s} a(x)dx} f(s)ds}$$

si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea.

**Teorema 1** Si consideri l'equazione lineare nell'incognita $y(t)$: $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$, con coefficienti e termine noto funzioni continue su un intervallo $I$ con $a(t) \neq 0$ e valori in $\mathbf{R}$ [risp. $\mathbf{C}$].
1- L'insieme delle soluzioni dell'equazione con termine noto nullo (equazionee omogenea associata) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ [risp. su $\mathbf{C}$]di dimensione 2 ovvero trovate due soluzoni dell'omogenea linearmente indipendenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ogni altra soluzione è del tipo $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ con $c_1$, $c_2$ in $\mathbf{R}$ [risp. $\mathbf{C}$].
2- Vi è almeno una soluzione dell'equazione $u^*(t)$.
3- Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo $u^*(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$.

**Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy** $\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1, \quad t \in I \end{cases}$

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogena $(u_1(t), u_2(t))$
2- si trova una soluzione particolare $u^*(t)$
3- si cercano $c_1, c_2$ per cui $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + u^*(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema.

**Passo 1 nel caso di coefficienti costanti**

Il caso elementare per trovare soluzioni è quello in cui i coeffcienti sono funzioni costanti.

**Teorema 2.** Si consideri l'equazione lineare omogenea nell'incognita $u(t)$: $au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$, con coefficienti costanti reali. Si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$u(t) = \begin{cases} c_1e^{t\alpha}\cos\beta t + c_2e^{t\alpha}\sin\beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di $c_1$ e $c_2$ in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha$ radici di $ax^2 + bx + c = 0$.
Volendo enunciare nel caso complesso il teorema si ha che tutte e sole le soluzioni (questa volta a valori in $\mathbf{C}$) al variare di $c_1$ e $c_2$ in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha$ radici di $ax^2 + bx + c = 0$. sono del tipo:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_1e^{\alpha_1t} + \gamma_2e^{\alpha_2t} & b^2 - 4ac \neq 0 \\ \gamma_1e^{\alpha t} + \gamma_2te^{\alpha t} & b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

al variare di $\gamma_1$ e $\gamma_2$ in $\mathbf{C}$, con $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha$ radici complesse di $ax^2 + bx + c = 0$.
Quindi se $a$ , $b$, $c$ sono reali si riottiene l'enunciato precedente osservando che per definizione di forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t,\ ie^{-it} - ie^{it} = 2\sin t$$

**Passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare**

<u>*Per tentativi*</u>

<u>*Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti*</u>

Se il termine noto è $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, con $p_1$ e $p_2$ polinomi reali, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^me^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove $q_1$ e $q_2$ sono polinomi con gradi minori del massimo di quelli di $p_1$ e $p_2$, ed $m$ molteplicità di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinomio associato all'equazione.
Tale metodo è piè semplice da enunciarsi, e da usare, nel caso complesso:
se il termine noto è $p(t)e^{\lambda t}$, con $p$ polinomio, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m\tilde{q}(t)e^{\lambda t}$$

ove $\tilde{q}$ è un polinomio con grado minore eguale a quello di $p(t)$, ed $m$ è la molteplicità di $\lambda$ come radice del polinomio associato all'equazione: $az^2 + bz + c$.

<u>*Variazione delle costanti*</u> Se $u_1(t)$, $u_2(t)$ danno una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $u^*(t) = \underline{c_1(t)u_1(t)} + \underline{c_2(t)u_2(t)}$, di modo che

$u^{*\prime} = c_1'u_1 + \underline{c_1u_1'} + c_2'u_2 + \underline{c_2u_2'}$,

$u^{*\prime\prime} = \widehat{c_1''u_1} + \widehat{c_1'u_1'} + c_1'u_1' + \underline{c_1u_1''} + \widehat{c_2''u_2} + \widehat{c_2'u_2'} + c_2'u_2' + \underline{c_2u_2''} = (\widehat{c_1'u_1 + c_2'u_2})' + \underline{c_1u_1''} + \underline{c_2u_2''} + c_1'u_1' + c_2'u_2'$,

- imponendo delle condizioni ausiliarie sulle funzioni $c_1$ e $c_2$, *per esempio* $c_1'u_1 + c_2'u_2 \equiv 0$, ci si riduce al sistema numerico ($t$ è fisso) con incognite $c_1'(t)$, $c_2'(t)$

$$\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' &= 0 \\ \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' &= \frac{f}{a} \end{cases}$$

quindi trovando le primitive di $c_1'$, $c_2'$ si è trovata una soluzione particolare.