Logica per la Programmazione
Corso di Laurea in INFORMATICA
a.a. 2019/20

Andrea Corradini e Filippo Bonchi

Dipartimento di Informatica
E-mail: andrea@di.unipi.it, filippo.bonchi@unipi.it

Informazioni Utili

- Docente: **Filippo Bonchi** filippo.bonchi@unipi.it
- Esercitazioni: **Laura Semini** + **Lucia Nasti?** + Filippo Bonchi
- Orario Lezioni: MER 14-16 - GIO 11-13, Aula E
- Ricevimento studenti: **Giovedi', 16-18** [e su appuntamento]
- Pagina web del corso: Moodle su elearning.di.unipi.it
  https://elearning.di.unipi.it/course/view.php?id=168
- Materiale didattico: dispense scaricabili dalla pagina web
- Occorre superare 25 CFU (almeno 12 CFU INF/01, e almeno 9 CFU MAT/* o FIS/*) entro settembre per passare al secondo anno
- **LPP (6 CFU) è un corso INF/01**

La Logica

- La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

> *"Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo..."* Aristotele

- Esempio di *sillogismo*
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale

La Logica (cont.)

Non tutti i sillogismi sono validi:

- Tutti gli animali sono mortali
- Pippo è mortale
- Pippo è un animale

- Tutti gli dei sono immortali
- Gli uomini non sono dei
- Gi uomini sono mortali

Dalla Logica alla Matematica

- Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (George Boole, Augustus de Morgan, ...)
- Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali: Russel, Gödel, Turing
- In matematica, la logica è usata, tra l'altro, per
  - esprimere asserti in modo non ambiguo
    Esempio: *tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi*

    $$(\forall n.\ n \in N \ \wedge \ pari(n) \ \wedge \ n > 2 \ \Rightarrow \ \neg primo(n))$$

  - chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione

Logica Matematica e Informatica

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM (P=NP è uno dei cinque Millennium problems)
  - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica (Isomorfismo di Curry-Howard: dimostrazioni e programmi)
- Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - formalizzazione di requisiti
  - dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
  - programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - programmazione funzionale e teoria dei tipi (Haskell, CAML)
  - rappresentazione della conoscenza (Intelligenza Artificiale)
  - strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - Model checking (SPIN, PRISM)
    - Proof assistants (COQ, Isabelle)

Dalla bacheca Facebook di un collega di Analisi Matematica

[Psico-Analisi3] Di qualunque genere, paese di origine, religione o orientamento sessuale sia il tuo docente di analisi, sappi che ella o egli è molto sensibile agli errori di logica. Per lui la logica non è solo un abito mentale che non si dismette mai, ma è addirittura una questione di civiltà e decoro.
Imparerai presto, se non lo sai dalle superiori, che gli errori di logica, in analisi, sono facili da commettere.
Mentre a nessuno verrebbe in mente di dire che tutti i mammiferi sono gatti, capita spesso di sentir dire che tutte le funzioni continue sono differenziabili. Tutti sappiamo la differenza tra avere una chiave per ogni serratura o avere una chiave che apre tutte le serrature, ma quando si parla di oggetti matematici, pare che questa differenza sia più difficile da cogliere: per ogni epsilon esiste un delta assomiglia molto a esiste un delta che per tutti gli epsilon... Anche perché, nel discorso comune...

Dalla bacheca Facebook di un collega di Analisi Matematica (Cont)

Ciò ha delle ragioni emotive: gatti e chiavi e serrature li visualizziamo, le passe-partout ci fanno venire in mente storie di ladri celebri, ecc. Gli oggetti matematici, invece, per chi s'avvicina alla materia, sembrano privi di consistenza e di immagine.
Ebbene, per il tuo docente di analisi questi oggetti astratti non sono astratti per nulla e lui dà per scontato che lo stesso sia per te. Ogni svarione logico nel discorrere di essi viene percepito come unghie che stridono sulla lavagna.
Non stupirti, quindi, se dopo aver fatto un errore di logica vedrai il docente reagire in maniera inusuale: divenire pallido, arrabbiarsi o, al contrario, diventare più gentile del solito, come si è con i matti pericolosi. E nemmeno ti devi spaventare. Se quel docente fa ricerca sul serio, gli svarioni di logica capitano anche a lui, nel segreto dei suoi block-notes.

Contenuti del Corso

- Introduzione (già fatta!)
- Calcolo Proposizionale
  - Connettivi logici e loro proprietà
  - Tautologie, tecniche di dimostrazione
- Logica del Primo Ordine
  - Sintassi e semantica
  - Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
  - Esempi da teoria degli insiemi e dominio dei naturali
- Quantificatori funzionali
  - min, max, cardinalità, sommatoria: leggi e dimostrazioni
- Triple di Hoare
  http://it.wikipedia.org/wiki/Tony_Hoare
  - Un semplice linguaggio imperativo, semantica operazionale
  - Verifica di proprietà di semplici programmi

Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo, quali dei seguenti fatti possiamo affermare con certezza?
  1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Una proposizione è un enunciato dichiarativo (per esempio una frase in linguaggio naturale) che "afferma qualcosa" e per il quale si può dire:

  Principio del terzo escluso:
  che è vero oppure è falso (non ci sono altre possibilità)

  Principio di non contraddittorietà:
  che non è al tempo stesso sia vero che falso.

  "dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa" Aristotele

Esempi di Proposizioni "Atomiche"

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $x+1 = 2$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p *allora* q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p *se e solo se* q	$p \equiv q$	*equivalenza*
p *se* q	$p \Leftarrow q$	*conseguenza*

Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$
\begin{array}{ll}
Prop & ::= \\
& \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \\
& p \mid q \mid \ \ldots \\
& (Prop \equiv Prop) \mid (Prop \wedge Prop) \mid (Prop \vee Prop) \mid \\
& (Prop \Rightarrow Prop) \mid (Prop \ \Leftarrow \ Prop) \mid (\neg Prop) \mid
\end{array}
$$

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - Introduciamo tre proposizioni:
    - $A \equiv$ "Antonio va al cinema"
    - $B \equiv$ "Bruno va al cinema"
    - $C \equiv$ "Corrado va al cinema"
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - $C \Rightarrow A$
- Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - $A \Rightarrow B$

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio (cont.)

- Il giorno successivo, quali dei seguenti fatti possiamo affermare con certezza?
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $C \Rightarrow B$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $B \Rightarrow C$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $\neg C \Rightarrow \neg B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- Piove e fa molto freddo
  P $\equiv$ "piove", R $\equiv$ "fa freddo" $[P \wedge R]$
- Fa freddo, ma non piove
  $[R \wedge \neg P]$
- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove
  N $\equiv$ "ci sono nuvole", V $\equiv$ "c'è vento" $[(N \wedge \neg V) \Rightarrow P]$
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre
  Ne $\equiv$ "nevica", C $\equiv$ "ci si copre" $[Ne \wedge (\neg R \Leftarrow C)]$
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica
  $[C \Rightarrow (R \vee Ne)]$
- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento
  $[P \Rightarrow (N \wedge \neg V)]$

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q $[P \Rightarrow Q]$
- P è una conseguenza di Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione necessaria e sufficiente per Q $[P \equiv Q]$
- P è condizione necessaria per Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione sufficiente per Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale solo se vale Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale se vale Q $[Q \Rightarrow P]$
- P vale se e solo se vale Q $[P \equiv Q]$
- Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno $[A \Rightarrow B]$

Tautologie e Contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - Esempio: $P \vee \neg P$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\neg$**P** è una contraddizione

Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- Diciamo che

$$p \textit{ implica tautologicamente } q$$
$$\text{se e solo se}$$
$$p \Rightarrow q \text{ è una tautologia}$$

$$p \textit{ è tautologicamente equivalente a } q$$
$$\text{se e solo se}$$
$$p \equiv q \text{ è una tautologia}$$

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?

Dimostrazione di Tautologie

- Per dimostrare che p è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p

- Cercare di costruire una dimostrazione
  - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - Usando opportune regole di *inferenza*
  - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione

- Mostrare che non è una tautologia
  - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p

Riflessioni per casa

Ripensiamo ad Antonio, Bruno e Corrado:

- Sappiamo che $(C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)$
- e ci chiediamo quali tra le seguenti formule ne sia *conseguenza logica*: $C \Rightarrow B$, $\neg A \land \neg B \land \neg C$, $B \Rightarrow C$, $\neg C \Rightarrow \neg B$.
- A tal fine è sufficiente sapere se le seguenti siano tautologie o meno
  - $((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  - $((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg C)$
  - $((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  - $((C \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
- Per ognuna delle formule precedenti, dare una dimostrazione attraverso tabelle di verità oppure mostrare un controesempio.