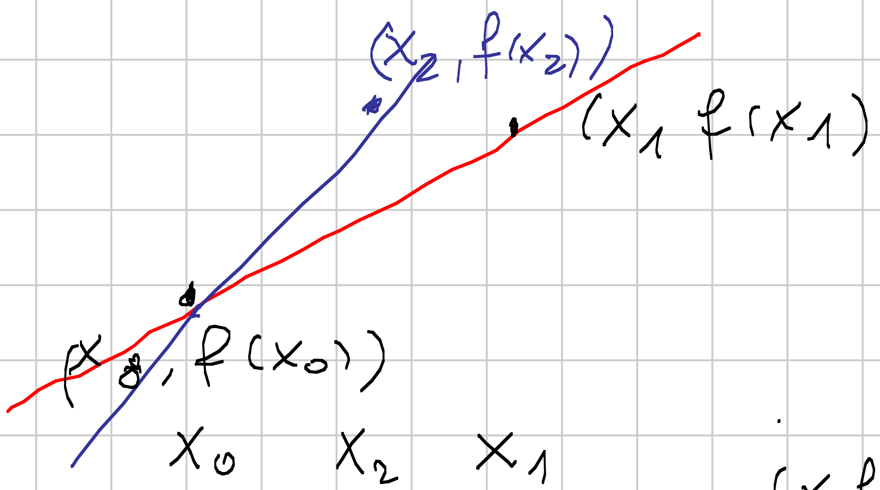
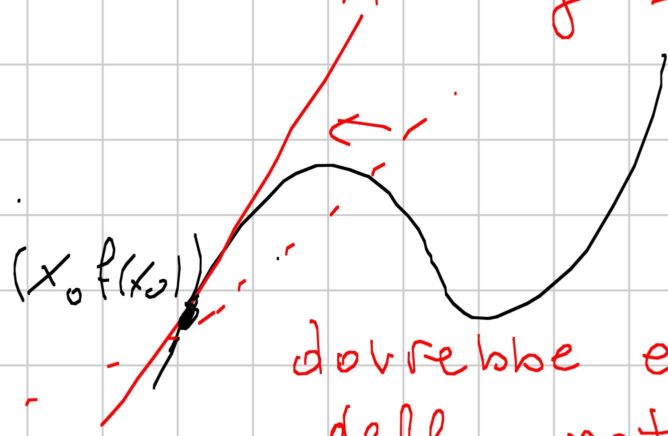
Note 18 ottobre 2019 sez. B

Note Title 10/18/2019

ANTICIPO TEORIA



coeff. ang $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$



se $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$

dovrebbe essere il coeff. ang della retta tangente (magari verticale)

Sia $x_0 \in \text{dom} f$ e di acc. per il dom f

f si dice

derivabile (dx, sx) in x_0 $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

$(x \to x_0^+, x \to x_0^-)$

ha derivata " " " $\in \overline{\mathbb{R}}$

TALE LIMITE SI INDICA $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

Definizione: si dice retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di f derivabile in x_0 il grafico $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Proposizione se f è derivabile in x_0 è continua in x_0

DIM

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

ma $x - x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ quindi $f(x) - f(x_0) \longrightarrow 0$

Def. • se f ha derivata a destra e a sinistra le der. dx e sx si indicano

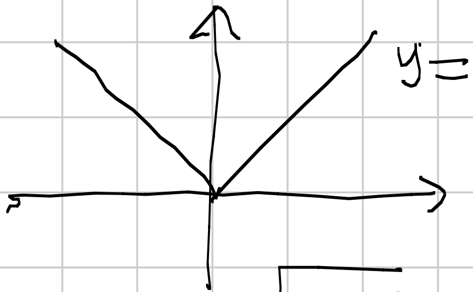
$$f'_+(x_0) \qquad f'_-(x_0)$$

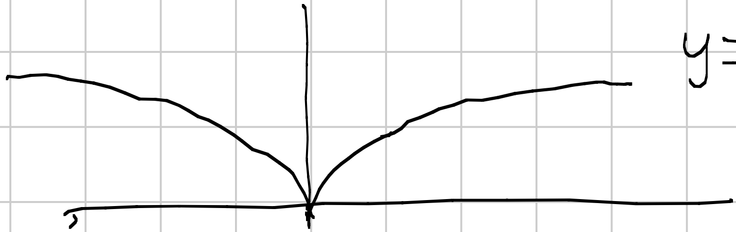
• se f è derivabile a dx e a sx e $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice pto angoloso

• se f ha derivate dx e sx infinite e diverse $(x_0, f(x_0))$ si dice punto di cuspide

$f(x) = |x| \quad x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \xrightarrow{x \to 0^+} 1 = f'_+(0) \\ -1 & x < 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1 = f'_-(0) \end{cases}$$





$f(x) = \sqrt{|x|} \quad x_0 = 0$

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \xrightarrow{x \to 0^+} +\infty \\ -\frac{\sqrt{-x}}{-x} = -\frac{1}{\sqrt{-x}} & x < 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty \end{cases}$$

$x < 0 \quad \sqrt{|x|} = \sqrt{-x} \quad x = -(-x)$

essere derivabile è più che "avere retta tangente" (in senso intuitivo)

<u>Proposizione</u> f è deriv. in x_0 $\Longleftrightarrow$ vi è $m \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$x \to x_0$$

$$[m = f'(x_0)]$$

DIM

$$\frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \to m \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \to 0 \qquad \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \to 0$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right)$$

Corollario se f è continua in x_0 di ecc.

e $f(x) = o(x - x_0)$ $x \to x_0$ allora

$\exists\, f'(x_0) = 0$

Def. funzione derivata $(f')(x) = f'(x)$ se f è derivabile in ogni x

Def. $\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right)(x)$ $\quad \frac{d^k f}{dx^k} \quad D^k f \quad f^{(k)}$

$\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}$ → è definita in un int. di x

Teoremi

0. f è costante su I allora $\forall x \; \exists f'(x) = 0$

1. f e g derivabili in x_0, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (f + \lambda g)'(x_0)$

(LINERITÀ)

$$= f'(x_0) + \lambda g'(x_0)$$

2. " " $\Rightarrow \exists (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

esercizio dimostrarlo $\pm f(x) g(x_0)$

3. f derivabile in x_0 $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

(ha derivata ed è cont. in x_0)

Prime derivate di funz. fond.

- $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\sin x)'' = -\sin x$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\sin x)''' = -\cos x$

$(\sin x)^{(4)} = \sin x$ $\qquad (\sin x)^{(k)} = \begin{cases} \sin x & k = 4h \\ \cos x & k = 4h+1 \\ -\sin x & k = 4h+2 \\ -\cos x & k = 4h+3 \end{cases}$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 = (\sin)'(0)$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

$(e^x)' = e^x$

Teorema $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ha derivata in x_0 ed è invertibile allora

$$\exists \, (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx} \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Teorema della derivata della funzione composta (regola della catena)

f è der. in x_0 g der. in $f(x_0)$

(e si può fare $g \circ f$ in un int. di x_0)

allora $\exists (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

$y = f(x)$

$z = g(y)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da giustif.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$g'(f(x_0)) \qquad f'(x_0)$$

$$(a^x)' \underset{a>0}{=} \left(e^{x \lg a}\right)' = (e^y)'(x \lg a) \cdot (x \lg a)'$$

$$= (e^y)'(x \lg e) \cdot \lg a$$

$$= (\lg a) \cdot a^x$$

$$(\lg x)'(x_0) = \left((e^y)^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{(e^y)'(\lg x_0)} =$$

$$= \frac{1}{e^{\lg x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

$$(x^\alpha)' \underset{x>0,\ \alpha\neq 0}{=} \left(e^{\alpha \lg x}\right)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\alpha > 0$

$$(x^\alpha)'(0) = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n = \ldots$$

$$= (x)'x^n + \underbrace{\ldots x^n}_{n\,x^n} = (n+1)\,x^n$$

$$\left(x^{\frac{1}{2n+1}}\right)'(0) = +\infty$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \dots = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\operatorname{tg} x)^2$$

$$(\operatorname{arctg} x)'(x_0) = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'(\operatorname{arctg} x_0)} = \frac{1}{1 + x_0^2}$$

ESERCIZI 5° FOGLIO, SIM.

D1 $f(x) = e^{x^2 \cdot \lg(\cos x + 2)}$

$F(z) = e^z$

$f(x) = F(x^2 \cdot \lg(\cos x + 2)) =$

$G(y) = \lg y$

$= F(x^2 \cdot G(\cos x + 2)) =$

$H(x) = \cos x + 2$

$= F(x^2 \cdot G(H(x)))$

$f' = F'(x^2 G(H(x))) \cdot (2x\, G(H(x)) + x^2 G'(H(x)) H')$

$$(\cos x+2)^{x^2}\cdot\left(2x\lg(\cos x+2)+x^2\,\frac{-\sin x}{\cos x+2}\right)$$

D2

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{1/x}} & x\neq 0\\[4pt] 0 & x=0\end{cases}$$

rapporto increm. in $x=0$ $=\dfrac{1}{1-e^{1/x}}$ $\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ $\xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$

D3 sapendo che

$(\sin x)'(0)=1$ la derivata

alla $\frac{1}{3}\sin(x-1)$ in 1 è $\frac{1}{3}$ -- B

D4 $f(x) = \left(\frac{e}{x} + \frac{e}{x^3} - \frac{e}{x^4}\right)^{1/3}$

$y = \frac{1}{x} = g(x)$

$f(x) = \left(y + y^3 - y^4\right)^{1/3} e^{1/3}$

$f'(x) = e^{1/3} \frac{1}{3} \left(y + y^3 - y^4\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (1 + 3y^2 - 4y^3)\dot{y}$

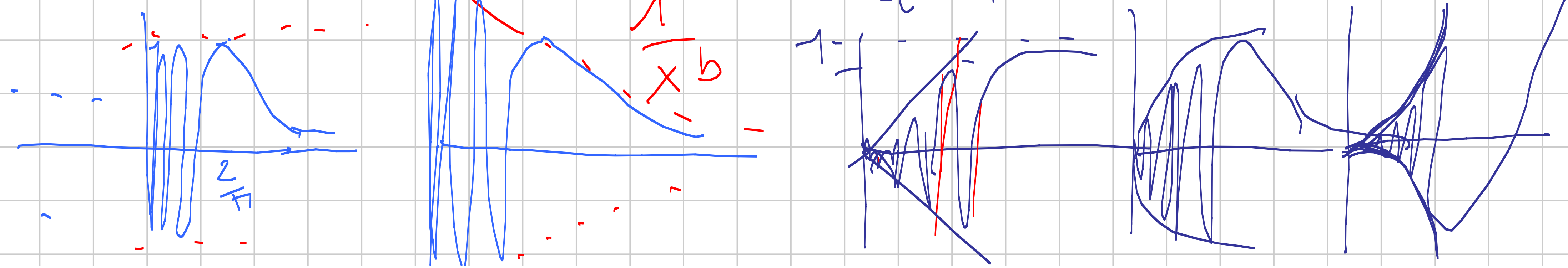
$= e^{1/3} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) \frac{e}{x^2}$

$- e^{1/3} \frac{1}{3} \cdot 0$

D5 f cont $\lim_{x \to 0} \sigma(x)$ ∃ $f'(0) = ?$

D6 se $a > 1$ $f = \delta(x)$ $x \to 0$ ed è cont. in 0

$x > 0$ $a = 0$ $a < 0$ $a = -b$ $a = 1$ $a < 1$ $a > 1$



D7

A) FALSO $f'(x) = 0$, pari. $f(x) = 1$ pari

C) FALSO $f'(x) = 1$ periodico. $f(x) = x$ non peri

D) FALSO $f(x) = \frac{\sin(x^{100})}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$f'(x) = -\frac{\sin x^{100}}{x^2} + \frac{\cos(x^{100}) \, 100 \, x^{99}}{x}$ ~~x^{98}~~

NOTA se $f \xrightarrow{x \to +\infty} 0$, $f' \xrightarrow{x \to +\infty} \ell \Rightarrow \ell = 0$

$f'(-x) = -f'(x)$

$f(x) = f(-x) =: g(x)'$

$f'(x) = -f'(-x)$

D9 $x^2\sqrt{x^2-2x+1} = x^2\sqrt{(x-1)^2}$

$x^2|x-1|$ D10 6K