NOTE DEL 25 OTTOBRE 2019

Note Title 10/25/2019

Es 3 sim. V

$$f(x) = (x^2+a)^3 \quad x \in \mathbb{R}, \; a>0$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x (x^2+a)^2$$

a) trovare x_0 ed a per cui la retta tang. al graf. di f in $(x_0, (x_0^2+a)^3)$ $(x_0, f(x_0))$ abbia equaz. $\boxed{y = \frac{27}{4}x}$ $m = \frac{27}{4}$ $q = 0$

$$y = mx + q$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 6x_0(x_0^2+a)^2(x-x_0) + (x_0^2+a)^3$$

$$m = f'(x_0) = 6x_0(x_0^2+a)^2 \qquad q = -6x_0^2(x_0^2+a)$$

$$\begin{cases} 6x_0(x_0^2+a)^2 = \boxed{\dfrac{27}{4}} \\ (x_0^2+a)^3 - 6x_0^2(x_0^2+a)^2 = \boxed{0} \end{cases}$$

$a > 0$

$$\begin{cases} 6x_0(x_0^2+a)^2 = \dfrac{27}{4} \\ x_0^2 + a = 6x_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_0(6x_0^2)^2 = \dfrac{27}{4} \\ a = 5x_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 \cdot \cancel{27} \cdot x_0^5 = \dfrac{\cancel{27}}{4} \\ a = 5x_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

b) Per quali $a > 0$ si ha $\forall x$ $f(x) \geq \frac{27}{4}x$?

" " si ha $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x^2+a)^3 \geq \boxed{\frac{27}{4}x}$

- $(x^2+a)^3 - \frac{27}{4}x \geq 0$? $\forall x \in \mathbb{R}$?

per quali a ?

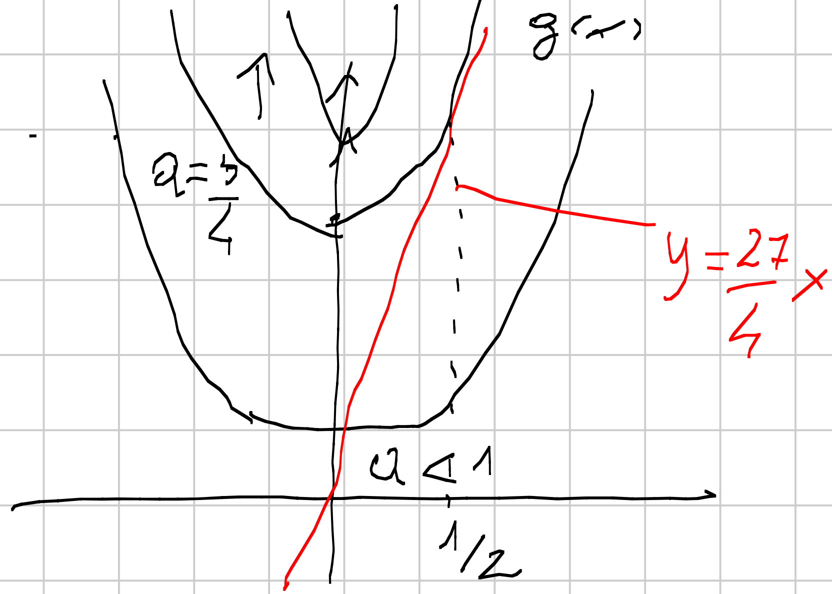
$\iff \min_{\mathbb{R}} \underbrace{(x^2+a)^3 - \frac{27}{4}x}_{g(x)} \geq 0$

per Weierstrass gen $\exists \min$:

$g'(x) = 6x(x^2+a)^2 - \frac{27}{4}$???

- Confronto grafico

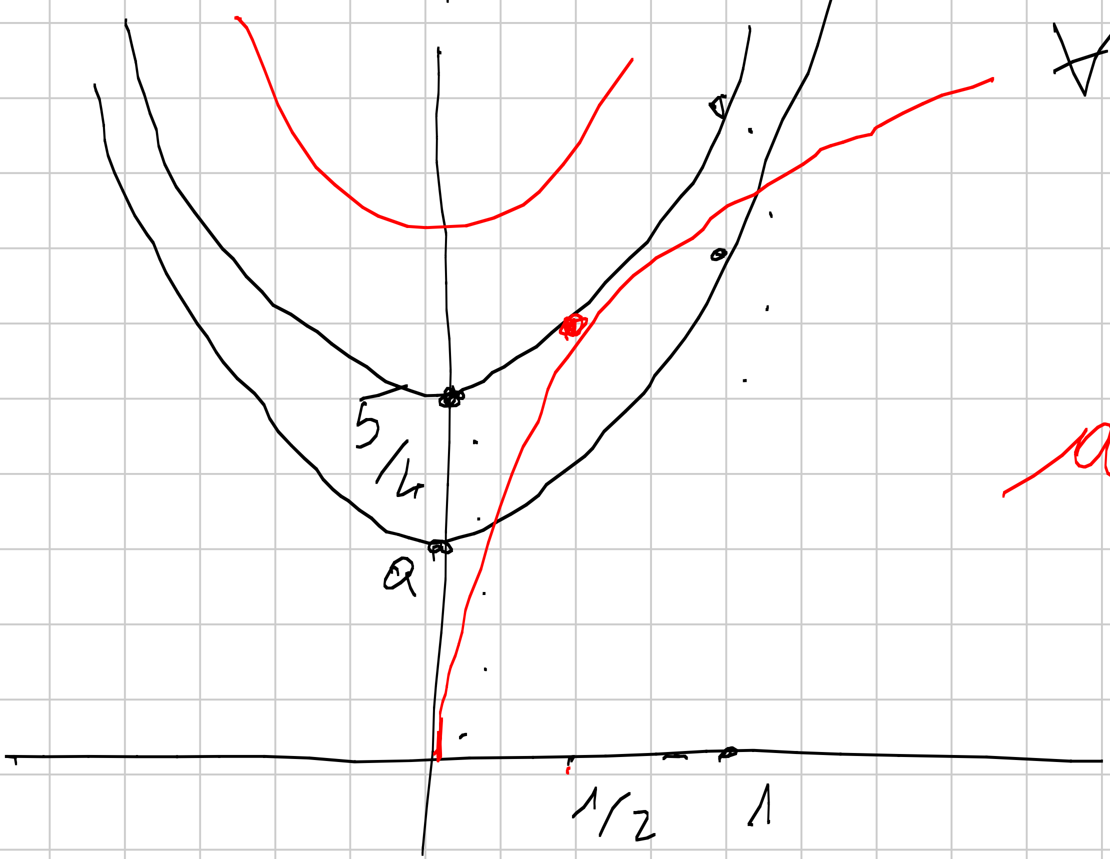
$a \geq \frac{5}{4}$



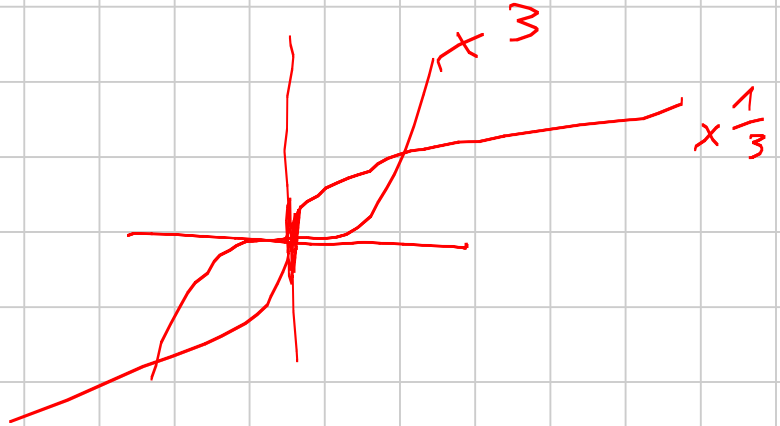
• per quali $a > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2+a)^3 \geq \boxed{\frac{27}{4} x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + a \geq \frac{3}{2^{2/3}} \boxed{x^{1/3}}$



$a \geq \frac{5}{4}$



Test VI foglio

D. 1 $\quad f(x) = 2x^7 + x^5 + 2x^3 + x + 3$

$f'(x) = 14x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1 \geq 1 > 0$

$\exists f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{Im} f = \mathbb{R} \quad \mathrm{Im} f^{-1} = \mathrm{dom} f$

valore intermedi' o generale $\neq 0$

$\exists (f^{-1})'(y) \ \forall y \qquad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$y = 3 \quad x = ? \ \text{t.c. } f(x) = 3 \quad (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

devo trovare x : $f(x) = 3$

$$2x^7 + x^5 + 2x^3 + x + \cancel{3} = \cancel{3} \implies x = 0$$

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{1}$$

NOTA valori intermedi generalizzato

$f : (a;b) \to \mathbb{R}$ continua $\quad \lim_{x \to a^+} f = \pm\infty$

allora f è suriettiva $\quad \lim_{x \to b^-} f = \mp\infty$

dato $z \in \mathbb{R}$ devo trovare x : $f(x) = z$

poiché $\lim_{a^+} f = -\infty$ $\exists x_1 : \forall x \in (a, x_1]$

$f(x) < -|z| - 1$

$\lim_{b^-} f = +\infty$ $\exists x_2$ $\forall x \in [x_2, b)$

$f(x) > |z| + 1$ ~~me~~

$-|z|+1 < -|z| \leq z \leq |z| < |z| + 1$

uso del teo dei valori intermedi in $[x_1, x_2]$

NOTA f : Intervallo $\to \mathbb{R}$ cont. $\operatorname{Im} f = \{\inf_I f ; \sup_I f\}$

D 2 per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\forall x \geq 0$ $e^x \geq \lambda x$

$3 \geq 5\lambda$

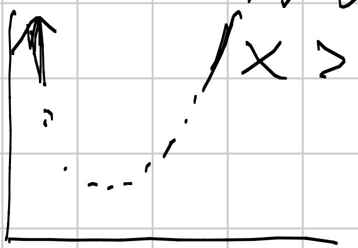
$\frac{3}{5} \geq \lambda$

isolo λ supponendo $x \neq 0$, $x > 0$ poiché per $x = 0$ è vero per ogni λ

$\forall x > 0 \quad \frac{e^x}{x} \geq \lambda$

$\inf_{x>0} \frac{e^x}{x} \geq \lambda$

$\frac{e^x}{x}, x > 0$



$\exists \min$

$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1) > 0$

$\Updownarrow$

$x > 1$

$\Downarrow$

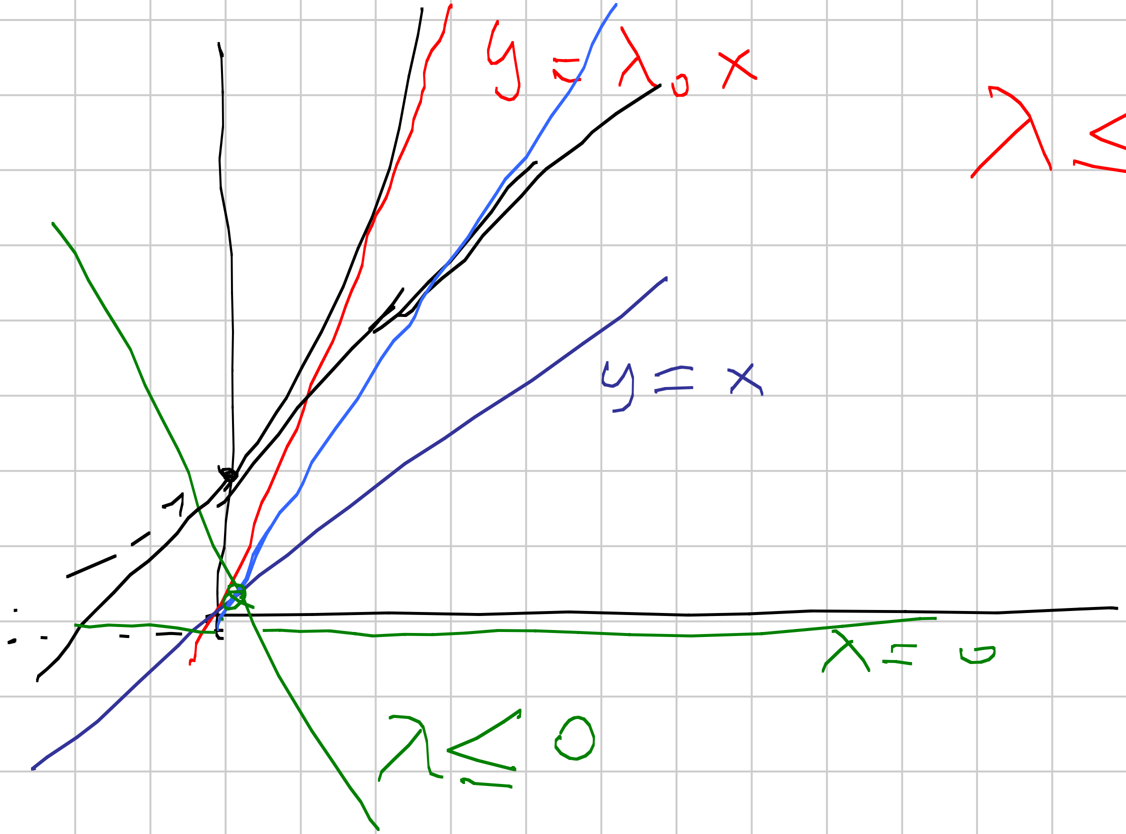
$\min f = f(1) = e$

RISPOSTA $e \geq \lambda$

• altro metodo: grafici naturali:

$e^x \geq \lambda x$

$\lambda \leq \lambda_0$



$e^x = 2x$

$e^{\cancel{x}} - \lambda x \geq 0$

$e^x - \lambda$

D.3 Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$

? $\lambda e^x > 1 + x \lg x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

? $\lambda > \underbrace{e^{-x}(1 + x \lg x)}_{g(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

se $g(x)$ ha massimo

$\lambda > \max g$

se $g(x)$ non ha mass

$\lambda \geq \sup g$

$$g' = e^{-x}(1 + \lg x - 1 - x \lg x) = e^{-x}(\lg x)(1-x) \gtrless 0$$

$$e^{-x}(\lg x)(1-x) \gtrless 0 \iff$$

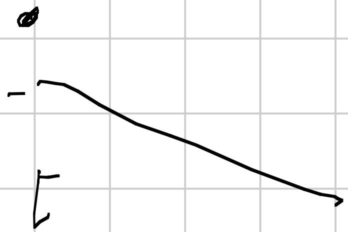
$\log_e$ − − + + + + + +

$1-x$ + + − − − −

sempre non positivo

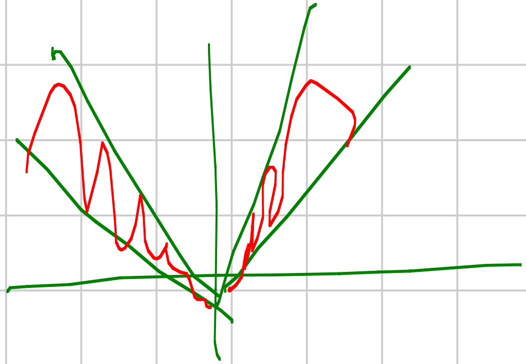
quindi g è decrescente quindi

$$\sup g = \lim_{x\to 0^+} g = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(1+x\lg x) = 1$$



$\lambda \geq 1$ (sup non max)

D 4. 5 per es. a casa



D 6 $\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \log(5-x^2)$ $[-1,2]$

Ricetta per la ricerca di valori di mass. min assol.

$\boxed{\text{0) Verificare che ci siano}}$ 1) elencare gli estremi del dominio

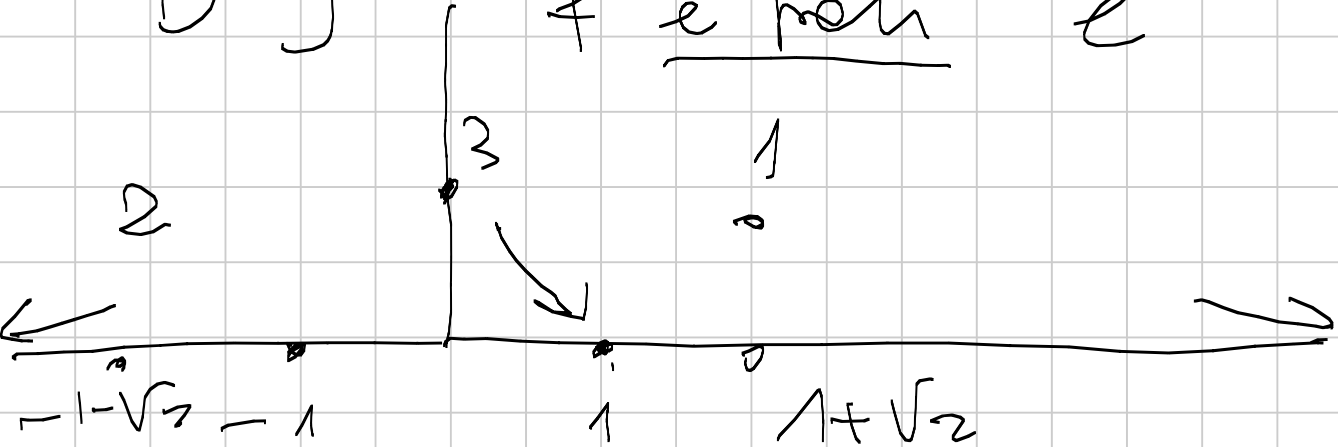
2) elencare i punti ove non c'è derivata 3) elencare i punti ove la derivata cambia segno

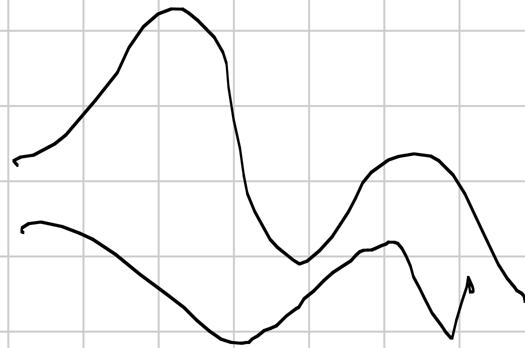
4) calcolare la funzione in tutti i questi punti. 5) il max/min tra i valori sarà il max/min assoluto

0) ok per W. 1) -1, 2 2) $\emptyset$ 3) $-2x$, 0 : $\log(5-x^2) \begin{cases} \log 4 \\ 0 \\ \log 5 \end{cases}$ $x=-1$ $x=2$

D8 a casa

D9 f <u>è pari</u> $e^{-|x|}|x^2-1|$





$x>0 \quad e^{-x}|x^2-1|$

$x^2-2x-1 \qquad \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \quad 1 \pm \sqrt{2}$

$1>x>0 \quad e^{-x}(1-x^2) \qquad e^{-x}(-2x-1+x^2)>0$ <u>MAI</u> $f'<0$ in $(0,1)$

$x>1 \quad e^{-x}(x^2-1) \qquad e^{-x}(2x-x^2+1)>0 \quad 1<x<1+\sqrt{2}$

NOTA DI UNO STUDENTE

Visto che le risposte sono

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

e tra 1 e $+\infty$ la funzione pos.
-1 e $-\infty$ ha massimi

si scartano A) e B)

Inoltre per $|x| \leq 1$ e $|x^2-1| \leq 1$ si ha

$e^{-|x|}|x^2-1| \leq 1$ in $[-1,1]$ ma in 0 vale 1

D. 10 per casa.