# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2019-2020
## Simulazione della Prima prova di verifica intermedia - 31/10/2019 -
### Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

**ESERCIZIO 1**
Si dimostri che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare tabelle di verità:

$$P \wedge R \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg S \wedge R) \ \equiv \ R \wedge S \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 1**
La formula è una tautologia. Semplifichiamo prima il membro destro e poi quello sinistro dell'equivalenza:

$$\begin{array}{ll}
 & P \wedge R \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg S \wedge R) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & \neg(P \wedge R) \vee (\neg Q \vee (\neg S \wedge R)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg P \vee \neg R) \vee (\neg Q \vee (\neg S \wedge R)) \\
\equiv & \quad \{(\text{assoc.}), (\text{comm.})\} \\
 & \neg P \vee \neg R \vee (R \wedge \neg S) \vee \neg Q \\
\equiv & \quad \{(\text{complemento})\} \\
 & \neg P \vee \neg R \vee \neg S \vee \neg Q \qquad \equiv \mathbf{(A)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & R \wedge S \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte }\} \\
 & \neg(R \wedge S) \vee (\neg P \vee \neg Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg R \vee \neg S) \vee (\neg P \vee \neg Q) \qquad \equiv \mathbf{(B)}
\end{array}$$

Concludiamo osservando che le formule (A) e (B) sono ovviamente equivalenti per associatività e commutatività della disgiunzione.

**ESERCIZIO 2**
Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R \wedge Q)$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 2**

1. **Soluzione** La formula non è una tautologia, perché è falsa ad esempio per l'assegnamento $\{Q \to F, R \to F, P \to T\}$, come mostrato dalla seguente tabella:

| $Q$ | $R$ | $P$ | $(Q$ | $\wedge$ | $R)$ | $\vee$ | $(\neg$ | $Q$ | $\wedge$ | $P)$ | $\Rightarrow$ | $(P$ | $\vee$ | $Q$ | $\Rightarrow$ | $R$ | $\wedge$ | $Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | **F** | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| | | | (1) | (2) | (1) | (4) | (2) | (1) | (3) | (1) | **(5)** | (1) | (2) | (1) | (3) | (1) | (2) | (1) |

2. **Soluzione** La formula è una tautologia. Vediamo tre possibili soluzioni, due delle quali usano ipotesi non tautologiche.

(1) Parto dall'intera formula, riducendola a $T$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \left\{ \text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{), due volte (seconda e quarta implicazione)} \right\} \\
 & \neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg(Q \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\text{, due volte}\} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \quad \{\text{(eliminazione-}\Rightarrow\text{)}\} \\
 & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)) \\
\equiv & \quad \{\text{(commutatività), (associatività)}\} \\
 & ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(complemento), due volte}\} \\
 & \neg Q \vee \neg P \vee Q \vee R) \\
\equiv & \quad \{\text{(terzo escluso), (zero)}\} \\
 & T
\end{array}
$$

(2) Dimostriamo la conseguenza $((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ usando la premessa $(P \Rightarrow Q)$ come ipotesi. Poiché la conseguenza è un'implicazione, partiamo dalla sua premessa:

$$
\begin{array}{ll}
 & Q \Rightarrow R \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } P \Rightarrow Q\} \\
 & (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \\
\Rightarrow & \quad \{\text{(transitività)}\} \\
 & P \Rightarrow R
\end{array}
$$

(3) Anche la seguente dimostrazione, di un solo passo, è corretta:

$$
\begin{array}{ll}
 & Q \Rightarrow R \\
\Rightarrow & \quad \left\{ \textbf{Ip: } Q \Leftarrow P,\ Q \text{ occorre in contesto negativo} \right\} \\
 & P \Rightarrow R
\end{array}
$$

**ESERCIZIO 3 (Speciale Halloween)**

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{g\}$, $\mathcal{P} = \{S, D, =\}$, dove i simboli di predicato $S$ e $=$ sono binari, mentre $D$ è unario. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutti gli studenti e $\alpha$ è definita come segue:

- $\alpha(g)$ è Gianni,
- $\alpha(S)(p, q) = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente $p$ farà uno scherzo allo studente $q$,
- $\alpha(=)(p, q) = \mathbf{T}$ se e solo se $p$ e $q$ sono lo stesso studente,
- $\alpha(D)(p) = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente $p$ avrà un dolce.

Si formalizzi il seguente enunciato:

*Gianni avrà un dolce ma ogni studente che farà uno scherzo ad un altro studente non avrà un dolce*

**SOLUZIONE ESERCIZIO 3 (Speciale Halloween)**

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$D(g) \wedge \big(\forall x \,.\, (\exists y \,.\, S(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \neg D(x)\big)$$

Si noti che nell'enunciato "ad un altro studente" può anche essere interpretato come "ad uno studente diverso da Gianni". Pertanto anche la seguente soluzione, o sue variazioni, sono considerate corrette:

$$D(g) \wedge \big(\forall x \,.\, (\exists y \,.\, S(x, y) \wedge \neg(y = g)) \Rightarrow \neg D(x)\big)$$

**ESERCIZIO 4**

Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x \,.\, (\exists y \,.\, Q(x, y) \;\; \Rightarrow \;\; \neg P(x)))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ed $\alpha$ è definita come segue

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z \in \{1, 2\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(z, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z, v) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove $\rho$ è un assegnamento arbitrario.

**SOLUZIONE ESERCIZIO 4**

Mostriamo che la formula $\Phi = (\forall x \,.\, (\exists y \,.\, Q(x, y) \;\Rightarrow\; \neg P(x)))$ è *vera* nell'interpretazione data.

La formula $\Phi$ è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a $x$ un qualunque valore $d$ del dominio $\mathcal{D}$ la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ è vera se, per ogni valore $d$ del dominio, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\Phi_1)$ è vera, con $\Phi_1 = (\exists y \,.\, Q(x, y) \;\Rightarrow\; \neg P(x))$.

Procediamo per casi esaminando i tre possibili valori del dominio.

$d = 1$. Per la regola (S9), visto che $\Psi$ è una **quantificazione esistenziale** abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore $d'$ del dominio che assegnato a $y$ rende vera la formula $\Phi_2 = Q(x, y) \;\Rightarrow\; \neg P(x)$. Ovvero tale che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\Phi_2)$ è vera.

Per la regola (S6), visto che $\Phi_2$ è un'**implicazione**, abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\Phi_2)$ è falsa se e solo se la premessa $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(Q(x, y))$ è vera e la conseguenza $\mathcal{I}_{\rho[1/x][d'/y]}(\neg P(x))$ è falsa. Notiamo che prendendo $d' = 3$ la premessa risulta falsa. Infatti per la regola (S1) abbiamo che

$$\mathcal{I}_{\rho[1/x][3/y]}(Q(x, y)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[1/x][3/y]}(x), \alpha_{\rho[1/x][3/y]}(y)) = \alpha(Q)(1, 3) = \mathbf{F}$$

$d = 2$. Ripetendo un ragionamento analogo a quello del punto precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore $d'$ del dominio tale che $\mathcal{I}_{\rho[2/x][d'/y]}(\Phi_2)$ sia vera. In questo caso considerando $d' = 2$ abbiamo $\mathcal{I}_{\rho[2/x][2/y]}(Q(x, y)) = \alpha(Q)(2, 2) = \mathbf{F}$. Quindi come nel caso precedente $\Phi_2$ è vera dato che la premessa è falsa nel caso di $d' = 2$.

$d = 3$ Ripetendo un ragionamento analogo a quello dei punti precedenti abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\Phi_1)$ è vera se esiste un valore $d'$ del dominio tale che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\Phi_2)$ sia vera. Si noti che nell'implicazione $\Phi_2 = Q(x, y) \;\Rightarrow\; \neg P(x)$ la conseguenza dipende solo da $x$, e che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(\neg P(x)) = \mathbf{T}$ applicando la regola (S3), perché $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(P(x)) = \mathbf{F}$ (infatti $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(P(x)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][d'/y]}(x)) = \alpha(P)(3) = \mathbf{F}$). Quindi $\Phi_2$ è vera qualunque sia il valore del dominio che scegliamo per $d'$.