

Logica per la Programmazione

Lezione 11

- ▶ Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza
- ▶ Regole di inferenza: Generalizzazione e Skolemizzazione

Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza

- ▶ Considereremo sempre linguaggi del primo ordine con **uguaglianza**, cioè con il simbolo speciale di predicato binario “=” (quindi $= \in \mathcal{P}$)
- ▶ Il significato di “=” è fissato: per qualunque interpretazione, la formula $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ è vera se e solo se \mathbf{t} e \mathbf{t}' **denotano lo stesso elemento del dominio di interesse**
- ▶ Più formalmente: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$, abbiamo $\mathcal{I}_\rho(\mathbf{t} = \mathbf{t}') = \mathbf{T}$ se $\alpha_\rho(\mathbf{t}) = \alpha_\rho(\mathbf{t}')$ (cioè se le semantiche di \mathbf{t} e \mathbf{t}' coincidono), **F** altrimenti

Leggi per l'Uguaglianza

- ▶ Per il predicato di uguaglianza valgono le seguenti leggi (dove la x può comparire libera in P):

$$(1) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \Rightarrow (P \equiv P[y/x]))) \quad (\textit{Leibniz})$$

$$(2) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]))$$

$$(3) \quad (\forall x . (\forall y . (x = y) \wedge P \Rightarrow P[y/x]))$$

$$(\forall y . (\forall x . (x = y) \Rightarrow P) \equiv P[y/x]) \quad (\textit{singoletto})$$

$$(\forall y . (\exists x . (x = y) \wedge P) \equiv P[y/x])$$

- ▶ **Esercizio:** Dimostrare che $(1) \equiv (2)$ e che $(1) \Rightarrow (3)$.

Regole di Inferenza: La Regola di Generalizzazione

- ▶ Per dimostrare una formula del tipo $(\forall x.P)$ possiamo procedere sostituendo x con un nuovo simbolo di costante d e dimostrare $P[d/x]$

$$\frac{\Gamma \vdash P[d/x], \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)}$$

- ▶ Intuitivamente, d rappresenta un **generico elemento del dominio** sul quale non possiamo fare alcuna ipotesi

Leggi per l'Uguaglianza e Generalizzazione

- ▶ Attenzione: spesso (e anche nella dispensa) queste leggi sono scritte informalmente *senza* quantificazioni:

$$(1) \quad (x = y) \Rightarrow (P \equiv P[y/x]) \quad (\textit{Leibniz})$$

$$(2) \quad (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]$$

$$(3) \quad (x = y) \wedge P \Rightarrow P[y/x]$$

- ▶ Se consideriamo x e y come variabili, sarebbero formule aperte, quindi non accettabili come leggi.
- ▶ Possiamo considerare la quantificazione universale implicita, quindi queste leggi come un abbreviazione di quelle presentate prima.
- ▶ Possiamo anche considerare x e y come costanti generiche e dedurre le formule quantificate universalmente con la Regola di Generalizzazione.

Regole di Inferenza: La Regola di Skolemizzazione

- ▶ Se sappiamo che $(\exists x.P)$ è vera, possiamo usarla per dimostrare una qualsiasi formula Q usando come ipotesi $P[d/x]$, dove d è una costante nuova, che non compare in Q :

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \quad \Gamma, P[d/x] \vdash Q}{\Gamma \vdash Q}$$

con d nuova costante che non occorre in Q

- ▶ Intuitivamente, è come se chiamassimo d un **ipotetico elemento del dominio** che testimonia la verità di $(\exists x.P)$.

Sulla Regola di Skolemizzazione

- ▶ Dal Teorema di Deduzione sappiamo che

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma, P \vdash Q$$

- ▶ Sfruttiamo questo fatto per derivare dalla Regola di Skolemizzazione una regola più semplice, che usa solo implicazioni e non premesse.
- ▶ [Skolemizzazione], già vista

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \quad \Gamma, P[d/x] \vdash Q}{\text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q} \Gamma \vdash Q$$

- ▶ [Skolemizzazione \Rightarrow]

$$\frac{(\exists x.P) \wedge P[d/x] \wedge R \Rightarrow Q}{\text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q} (\exists x.P) \wedge R \Rightarrow Q$$

Esempi di formule dimostrabili con Skolemizzazione

1. $(\forall x . P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x . P) \Rightarrow (\exists x . Q)$
2. $(\forall x . P) \wedge (\exists x . Q) \Rightarrow (\exists x . P)$
3. $(\forall x . P \Rightarrow R) \wedge (\exists x . P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x . Q \wedge R)$
4. $((\forall x . P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x . Q \wedge \neg S)) \wedge (\exists x . Q \vee R) \Rightarrow \neg(\forall x . \neg P \wedge \neg(S \vee R))$

Esercizio: Dimostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x . P) \Rightarrow (\exists x . P)$$

Esercizi sulle Regole di Skolemizzazione e Generalizzazione

1. Mostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x.(\exists y.P)) \Rightarrow (\exists y.(\forall x.P))$$

2. Mostrare che invece la seguente formula è valida:

$$(\exists y.(\forall x.P)) \Rightarrow (\forall x.(\exists y.P))$$

Suggerimento: si può dimostrare sia usando la Generalizzazione che la Skolemizzazione. Provare a svolgere entrambe le dimostrazioni

3. Mostrare che eliminando dalla Regola di Skolemizzazione la condizione “con *d* nuova costante che non occorre in *Q*” la regola risultante non è corretta, perché permette di dimostrare formule non valide, come la seguente:

$$(\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \Rightarrow (\exists x.P \wedge Q)$$