Logica per la Programmazione

Lezione 12

- Logica del Primo Ordine con Insiemi ed Intervalli
- Formalizzazione di Enunciati: Array e Sequenze

Rappresentazioni Intensionali ed Estensionali di Insiemi

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione **estensionale** (*in extenso*) di insiemi

$$\mathit{Divisori\_di\_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- Rappresentazione **intensionale** (*in intenso*) di insiemi

$$\mathit{Divisori\_di\_30} = \{k \mid k \leq 30 \wedge (\exists n \,.\, k \times n = 30)\}$$

- Rappresentazione **intensionale per insiemi infiniti**

$$\mathit{Multipli\_di\_7} = \{k \mid (\exists n \,.\, k = n \times 7)\}$$

Notazione per Insiemi

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare **insiemi di naturali in modo intensionale**:

$$Term \quad ::= \quad Const \mid Var \mid FIde(Term\{, Term\}) \mid \boxed{\{Var \mid Fbf\}}$$

- Abbiamo termini come $\{x \mid P\}$ dove x è una variabile, e P una formula (solitamente con x libera).
- La variabile x è **legata** in $\{x \mid P\}$
- Nuovo simbolo di predicato binario $\in$, definito dalla legge:

$$y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x] \qquad \text{(def-}\in\text{)}$$

Insieme Vuoto

- Introduciamo la nuova costante $\emptyset$, definita come $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$
- Dimostriamo che $(\forall y \,.\, (y \in \emptyset) \equiv \mathbf{F})$ è valida.
- Per la **Regola di Generalizzazione**, è sufficiente dimostrare $(k \in \emptyset) \equiv \mathbf{F}$ per una nuova costante k

$$
\begin{array}{ll}
 & k \in \emptyset \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \emptyset)\} \\
 & k \in \{x \mid \mathbf{F}\} \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\ [y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x]]\} \\
 & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Leggi per Insiemi

- Ricordiamo il **principio di estensionalità** degli insiemi e la definizione di inclusione: per ogni coppia di insiemi (A, B) vale
  - $(A = B) \equiv (\forall x \,.\, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - $(A \subseteq B) \equiv (\forall x \,.\, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Valgono le seguenti leggi:

$$(\forall x \,.\, P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\equiv)$$

$$(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-} \Rightarrow)$$

- Dimostriamo la seconda usando la definizione di inclusione:

$$\begin{array}{ll}
 & z \in \{x \mid P\} \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & P[z/x] \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Ip: } \forall x \,.\, P \Rightarrow Q), (\text{Elim-}\forall)\} \\
 & Q[z/x] \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & z \in \{x \mid Q\}
\end{array}$$

Uguaglianze e Disuguaglianze

Estendiamo il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$.
I predicati $=, \leq, \geq$ soddisfano i seguenti assiomi (la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$ (riflessività-$=$)
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$ (simmetria-$=$)
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività-$=$)

- $x \leq x$ (riflessività-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (antisimmetria-$\leq$)
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività-$\leq$)
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (totalità-$\leq$)

- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$ (def-$\geq$)

I predicati $\leq, \geq, =$ legano più dei connettivi logici: tutte le parentesi possono essere omesse

Un po' di Terminologia...

- Una relazione binaria R è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x \; R \; x$
  - simmetrica: $(x \; R \; y) \Rightarrow (y \; R \; x)$
  - transitiva: $(x \; R \; y) \wedge (y \; R \; z) \Rightarrow (x \; R \; z)$

  Esempio: l'uguaglianza $=$, l'equivalenza $\equiv$
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica

  $$(x \; R \; y) \wedge (y \; R \; x) \Rightarrow (x = y)$$

  Esempio: inclusione $\subseteq$ tra insiemi, $\leq$ su numeri naturali
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni x, y vale $(x \; R \; y) \vee (y \; R \; x)$

  Esempio: $\leq$ su numeri naturali

Quiz su Relazioni Binarie

- L'inclusione $\subseteq$ tra insiemi è totale?
- Può una relazione essere sia simmetrica che anti-simmetrica?
- Quali delle seguenti proprietà soddisfa la relazione $P \wedge Q$ sulle proposizioni?
  - Riflessività
  - Simmetria
  - Antisimmetria
  - Transitività
  - Totalità
- E quali proprietà soddisfa la relazione $P \vee Q$ sulle proposizioni?

Intervalli: Notazione e Definizioni

- Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche, $a, b \in \mathbb{N}$:
  - $[a, b] = \{x \mid (a \leq x) \wedge (x \leq b)\}$ intervallo chiuso
  - $[a, b) = \{x \mid (a \leq x) \wedge (x < b)\}$ intervallo semiaperto a destra
  - $(a, b] = \{x \mid (a < x) \wedge (x \leq b)\}$ intervallo semiaperto a sinistra
  - $(a, b) = \{x \mid (a < x) \wedge (x < b)\}$ intervallo aperto
- Definizione di relazioni ausiliarie:

$$(x \neq y) \equiv \neg(x = y) \qquad \text{(def-}\neq\text{)}$$

$$(x < y) \equiv (x \leq y) \wedge (x \neq y) \qquad \text{(def-}<\text{)}$$

$$(x > y) \equiv (x \geq y) \wedge (x \neq y) \qquad \text{(def-}>\text{)}$$

Altre leggi su disuguaglianze

Dimostrare le seguenti leggi:

$$(x \geq y) \equiv (x > y) \vee (x = y) \quad \text{(elim-}\geq\text{)}$$

$$(x \leq y) \equiv (x < y) \vee (x = y) \quad \text{(elim-}\leq\text{)}$$

$$\neg(x \leq y) \equiv x > y \quad (\neg\text{-}\leq)$$

$$\neg(x \geq y) \equiv x < y \quad (\neg\text{-}\geq)$$

Notazione per gli Intervalli

Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I, che noi eviteremo:

- $(\forall x \in I \,.\, Q)$ o $(\forall x : x \in I \,.\, Q)$ per $(\forall x \,.\, x \in I \Rightarrow Q)$
- $(\exists x \in I \,.\, Q(x))$ o $(\exists x : x \in I \,.\, Q)$ per $(\exists x \,.\, x \in I \wedge Q)$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli

- Leggi utili per ridurre la quantificazione di una variabile su di un intervallo ad un intervallo più piccolo.
- Sono un caso particolare delle leggi per quantificazione su domini

(Intervallo-$\forall$)

$$(\forall x \,.\, x \in [a,b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x \,.\, x \in [a,b) \Rightarrow Q) \wedge Q[b/x] \quad \text{se } [a,b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\forall x \,.\, x \in [a,b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x \,.\, x \in (a,b] \Rightarrow Q) \wedge Q[a/x] \quad \text{se } [a,b] \text{ non è vuoto}$$

(Intervallo-$\exists$)

$$(\exists x \,.\, x \in [a,b] \wedge Q) \equiv (\exists x \,.\, x \in [a,b) \wedge Q) \vee Q[b/x] \quad \text{se } [a,b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x \,.\, x \in [a,b] \wedge Q) \equiv (\exists x \,.\, x \in (a,b] \wedge Q) \vee Q[a/x] \quad \text{se } [a,b] \text{ non è vuoto}$$

Leggi per Quantificazioni su Domini

Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione su un dominio P ad un dominio più piccolo $(P \wedge (x \neq \mathbf{k}))$, dove $\mathbf{k}$ è un termine chiuso (che quindi denota un elemento del dominio di interpretazione).
Vediamo solo quella per il quantificatore universale, con dimostrazione.

(Dominio-$\forall$)

$$(\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

È evidente che la legge (Intervallo-$\forall$) vista prima è un caso particolare:

$$(\forall x \,.\, x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x \,.\, x \in [a, b) \Rightarrow Q) \wedge Q[b/x] \quad \text{se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

Dimostrazione Legge (Dominio-$\forall$) (1)

Vogliamo mostrare che le seguenti implicazioni sono valide:

1. $P[k/x] \Rightarrow \big((\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \equiv (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x]\big)$
2. $\neg P[k/x] \Rightarrow \big((\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \equiv (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q)\big)$

Trasformiamo il membro sinistro dell'equivalenza:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x \,.\, P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso}), (\text{Unità})\} \\
 & (\forall x \,.\, P \wedge ((x = k) \vee (x \neq k)) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distrib.})\} \\
 & (\forall x \,.\, (P \wedge (x = k)) \vee (P \wedge (x \neq k)) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Dominio})\} \\
 & (\forall x \,.\, P \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Leibniz})\} \\
 & (\forall x \,.\, P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x \,.\, P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Dimostrazione Legge (Dominio-$\forall$) (2)

Completiamo la dimostrazione nei due casi usando ipotesi non valide:

- Caso $P[k/x] \equiv \mathbf{T}$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x . P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip}\text{: } P[k/x] \equiv \mathbf{T}\text{ , (Unità)}\} \\
 & (\forall x . (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\text{(Singoletto)}\} \\
 & Q[k/x] \wedge (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

- Caso $P[k/x] \equiv \mathbf{F}$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x . P[k/x] \wedge (x = k) \Rightarrow Q) \wedge (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip}\text{: } P[k/x] \equiv \mathbf{F}\text{ , (Zero)}\} \\
 & (\forall x . \mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}\text{, (costante), (unità)}\} \\
 & (\forall x . P \wedge (x \neq k) \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Specifiche con Array e Sequenze

- Un **array** (o **sequenza**) a di lunghezza n è rappresentato da una **funzione dall'intervallo** $[0, n) = \{0, 1, ..., n-1\}$ **ad** $\mathbb{N}$
- Notazione: $a[i]$ indica il valore i-esimo della funzione (array) a
- Esempio: $a = \{0 \mapsto 45, 1 \mapsto 23, 2 \mapsto 10, 3 \mapsto 16\}$

45	23	10	16

- Nota: il primo elemento ha posizione/indice 0: $a[0] = 45$

Esercizi di Formalizzazione (1)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- a è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall i \,.\, i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = 0)$$

- per ogni elemento di a esiste un elemento di b uguale o più grande

$$(\forall i \,.\, i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j \,.\, j \in [0, n) \wedge a[i] \leq b[j]))$$

Esercizi di Formalizzazione (2)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

1. a rappresenta una funzione monotona crescente
2. m è il massimo dell'array a
3. m è l'indice del massimo dell'array a
4. a ha tutti elementi distinti
5. a ha tutti elementi distinti e b è l'array a ordinato in senso crescente.

Esercizi di Formalizzazione (3)

Si assuma che le sequenze siano array con dominio $[0, n)$

- Nella sequenza **a** c'è un solo elemento uguale alla sua posizione
- Gli elementi di indice pari della sequenza **a** sono dispari
- Definire il predicato *Palindroma*(**a**), che vale **T** se e solo la sequenza **a** è simmetrica rispetto al suo punto centrale