Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 5/6/2014

N.B.: Gli esercizi da svolgere come prova scritta del primo appello dell'esame di "Geometria analitica e algebra lineare" sono quelli con la siglia GAAL. La durata della prova è di 3 ore.

Gli esercizi da svolgere come recupero del terzo compitino sono quelli con la sigla R3. La durata della prova di recupero è di 2 ore.

Esercizio 1. [GAAL]
Si considerino i sottospazi H_1, H_2, H_3 di $V = \mathbb{R}_3[x]$ definiti da

$$H_1 = \{p(x) \in V \mid x^2 - x \text{ divide } p(x)\},$$
$$H_2 = \{p(x) \in V \mid p(-1) = 0\}, \qquad H_3 = \{p(x) \in V \mid \deg p(x) \leq 2\}.$$

Sia $E = \{f \in End(V) \mid f(H_1) \subseteq H_2, f(H_2) \subseteq H_1, \operatorname{Im} f \subseteq H_3\}$.

(i) Si provi che E è un sottospazio vettoriale di $End(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

(ii) Si costruisca, se esiste, un endomorfismo $g \in E$ non diagonalizzabile e tale che $3x + 1 \in \operatorname{Im} g$.

Esercizio 2. [GAAL]
Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = k^3 v_1$.

(i) Si determini il polinomio minimo di f.

(ii) Si dimostri che esiste un unico sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim U = 1$ e U è f-invariante.

(iii) Si dimostri che esiste un unico sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim W = 2$ e W è f-invariante.

(iv) Si dimostri che, se $v \notin U \cup W$, allora $\{v, f(v), f^2(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. [GAAL, R3]
Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Siano $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ e $W_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + 2y - hz = 0\}$.

(i) Detto $\mathcal{I}(\Phi)$ l'insieme dei vettori isotropi di $\mathbb{R}^3$ rispetto a Φ, si determini $W \cap \mathcal{I}(\Phi)$.

(ii) Si determini l'insieme Ω dei valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali esiste $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ tale che $f(W) = W_h$ e $f(W_h) = W$.

Esercizio 4. [R3]
Siano r_1, r_2 le rette affini di $\mathbb{R}^3$ date da

$$r_1 = \{t(1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{(0, 1, 0) + s(0, 0, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Si determini, se esiste, una retta di $\mathbb{R}^3$ passante per $q = (3, 2, -1)$ e che interseca sia r_1 che r_2.

(ii) Per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, sia $f_{a,b} \colon r_1 \to r_2$ l'applicazione definita da

$$f_{a,b}(t, 0, 0) = (0, 1, at + b).$$

Si verifichi che $f_{a,b}$ è un isomorfismo affine.

(iii) Sia $X_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme dato dall'unione di tutte le rette della forma

$$p + h\overrightarrow{pf(p)}\,,\ h \in \mathbb{R}\ .$$

al variare di p in r_1. Si mostri che $X_{a,b}$ coincide con il supporto della quadrica affine $\mathcal{C}_{a,b}$ di equazione $by^2 - axy - yz - by + z = 0$.

(iv) Si mostri che, per ogni $a, a' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ogni $b, b' \in \mathbb{R}$, le quadriche $\mathcal{C}_{a,b}$ e $\mathcal{C}_{a',b'}$ sono affinemente equivalenti.

Soluzioni

Esercizio 1.

(i) La verifica che E è un sottospazio vettoriale è standard.

Si osserva che $H_1 = \{x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ e $H_2 = \{(x+1)(ax^2+bx+c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Pertanto $\dim H_1 = 2$ e $\dim H_2 = 3$. Evidentemente $\dim H_3 = 3$. Inoltre $H_1 \cap H_2 = Span(p)$ con $p(x) = x(x-1)(x+1)$, $H_1 \cap H_3 = Span(p_1)$ con $p_1(x) = x(x-1)$ e $H_2 \cap H_3 = Span(p_2, p_3)$ con $p_2(x) = x+1$ e $p_3(x) = x(x+1)$. L'insieme $\mathcal{B} = \{p, p_1, p_2, p_3\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$. Sia $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \colon End(\mathbb{R}_3[x]) \to M(4, \mathbb{R})$ l'isomorfismo che associa ad ogni endomorfismo di $End(\mathbb{R}_3[x])$ la sua matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$. Poiché $\dim E = \dim \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E)$, determiniamo il sottospazio $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E)$ formato dalle matrici associate agli endomorfismi di E.

Sia $f \in E$. Poiché $f(H_1) \subseteq H_2, f(H_2) \subseteq H_1$ e $\operatorname{Im} f \subseteq H_3$, allora $f(p) \in H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{0\}$. Inoltre $f(p_1) \in H_2 \cap H_3$, $f(p_2) \in H_1 \cap H_3$ e $f(p_3) \in H_1 \cap H_3$. Pertanto $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ per opportuni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. D'altra parte ogni matrice di questo tipo è associata ad un endomorfismo di E, dunque

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Di conseguenza $\dim E = 4$.

(ii) Vediamo se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui l'endomorfismo g tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile e $3x + 1 \in \operatorname{Im} g$.

Poiché $3x+1 = -p_1+p_2+p_3$, il polinomio $3x+1 \in \operatorname{Im} g$ se e solo se il sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha soluzione. Deve dunque aversi $a = b$ non nulli. Ad esempio scegliendo $a = 1, b = 1, d = 0, c = -1$, g verifica tutte le proprietà richieste.

Esercizio 2.

(i) La matrice associata ad f nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha come polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3 + k^3 = -(t-k)(t^2+kt+k^2)$. Osserviamo che t^2+kt+k^2 è irriducibile in $\mathbb{R}[t]$ e in particolare non ha radici reali.

Il polinomio minimo $m_A(t)$ di A è un divisore di $p_A(t)$: non può essere $t-k$ perché altrimenti si avrebbe $A = kI$; non può essere neppure $t^2 + kt + k^2$ perché A ha un autovalore reale mentre $t^2 + kt + k^2$ non ha radici reali. Pertanto $m_A(t) = t^3 - k^3$.

(ii) L'autovalore k ha molteplicità algebrica (e dunque geometrica) 1, per cui l'autospazio $V(k)$ ha dimensione 1 ed è f-invariante. Non avendo f altri autovalori reali, non può esistere nessun altro sottospazio f-invariante di dimensione 1.

(iii) Dalla teoria sappiamo che $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - k\,id) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + kf + k^2\,id)$ e che $W = \operatorname{Ker}(f^2 + kf + k^2\,id)$ è f-invariante. Poiché $\dim \operatorname{Ker}(f - k\,id) = 1$, allora $\dim W = 2$.

Se esistesse un altro sottospazio W' di dimensione 2 e f-invariante, allora $W \cap W'$ sarebbe un sottospazio f-invariante di dimensione 1; un suo generatore sarebbe un autovettore per f, mentre $f|_W$ non ammette autovettori.

(iv) Sia $v \notin U \cup W$. Poiché $v \notin U = V(k)$, v non è un autovettore e dunque v e $f(v)$ sono linearmente indipendenti. Se per assurdo $\{v, f(v), f^2(v)\}$ non fosse una base di $\mathbb{R}^3$, allora $f^2(v) \in Span(v, f(v))$ e dunque $Span(v, f(v))$ sarebbe un sottospazio di dimensione 2 f-invariante. Per quanto provato nel punto (iii) si avrebbe $Span(v, f(v)) = W$, il che è assurdo visto che $v \notin W$.

Esercizio 3.

(i) $\mathcal{I}(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 - z^2 = 0\}$, per cui $W \cap \mathcal{I}(\Phi) = Span(w)$ con $w = (1, 0, 1)$.

(ii) Supponiamo che $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ sia un endomorfismo tale che $f(W) = W_h$ e $f(W_h) = W$. Allora necessariamente $f(W \cap W_h) = W \cap W_h$ e per ogni vettore $z \in \mathcal{I}(\Phi)$ si dovrà avere che $f(z) \in \mathcal{I}(\Phi)$.

Intanto si osserva subito che $W \cap W_h = Span(v)$ con $v = (2, 1, 2)$ indipendentemente dal valore del parametro h e quindi $f(v) = av$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. Inoltre, dalle proprietà di f segue che $f(W \cap \mathcal{I}(\Phi)) \subseteq W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ e $f(W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)) \subseteq W \cap \mathcal{I}(\Phi)$. Poiché f è iniettiva e $W \cap \mathcal{I}(\Phi)$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 1, allora anche $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ deve essere un sottospazio vettoriale di dimensione 1.

Con facili calcoli si vede che $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y = hz + (1-h)x, (2+h^2-2h)x^2 + 2h(1-h)xz + (h^2-1)z^2 = 0\}$. Poiché $\mathcal{I}(\Phi) \cap \{z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$, in particolare $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ non contiene rette sul piano $\{z = 0\}$. Pertanto $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ si riduce ad una sola retta se e solo se si annulla il discriminante dell'equazione $(2 + h^2 - 2h)t^2 + 2h(1-h)t + h^2 - 1 = 0$ ottenuta dividendo per z^2 e ponendo $t = \frac{x}{z}$. Tale discriminante vale $2-2h$, per cui $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ si riduce ad una singola retta solo per $h = 1$, nel qual caso $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi) = Span(z)$ con $z = (0, 1, 2)$. Dunque l'unico valore di h per cui può esistere f con le proprietà richieste è $h = 1$.

Alternativamente si può raggiungere lo stesso risultato osservando che $W_h \cap \mathcal{I}(\Phi)$ è l'intersezione con il piano $2y = hz + (1-h)x$ di una quadrica di $\mathbb{R}^3$. Tale quadrica è un cono e un cilindro, contiene l'asse y e interseca il piano $2y = hz + (1-h)x$ in una singola retta solo quando essa è un piano doppio, fatto che accade per $h = 1$.

D'altra parte vediamo che, fissato $h = 1$, effettivamente esiste un'isometria $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ tale che $f(W) = W_1$ e $f(W_1) = W$. Per quanto osservato sopra dovrà aversi $f(v) = av$, $f(w) = bz$ e $f(z) = cw$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sia dunque f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v, w, z\}$ di $\mathbb{R}^3$ alla matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. La matrice associata a Φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ se e solo se ${}^tAMA = M$. Poiché ${}^tAMA = \begin{pmatrix} 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2bc \\ 0 & -2bc & 0 \end{pmatrix}$, f è una isometria rispetto a Φ se e solo se $a^2 = 1, bc = 1$. Poiché esistono valori a, b, c che soddisfano tali condizioni, per $h = 1$ esiste f con le proprietà richieste e dunque $\Omega = \{1\}$.

Esercizio 4.

(i) Sia $p = (t, 0, 0)$ il generico punto della retta r_1. La retta congiungente p e q ha equazione parametrica $X = (t, 0, 0) + h(3-t, 2, -1)$. Tale retta interseca r_2 se e solo se esistono $s \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$ tali che $(t, 0, 0) + h(3-t, 2, -1) = (0, 1, s)$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema lineare $h(3-t) = -t, 2h = 1, s+h = 0$ nelle incognite h, s ha soluzione se e solo se il determinante della matrice completa del sistema $\begin{pmatrix} 3-t & 0 & -t \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è nullo. Ciò avviene se e solo se $t = -3$. In questo caso la retta $X = (-3, 0, 0) + h(6, 2, -1)$ passa per q (per $h = 1$), interseca r_1 nel punto $(-3, 0, 0)$ (per $h = 0$) e interseca r_2 nel punto $(0, 1, -1/2)$ (per $h = 1/2$).

(ii) r_1 è una retta passante per l'origine e pertanto coincide con la sua giacitura W_1 come sottospazio affine. La giacitura di r_2 è la retta $W_2 = Span(0, 0, 1)$. Poiché $f_{a,b}(t, 0, 0) = (0, 1, b) + (0, 0, at)$ e $\varphi(t, 0, 0) = (0, 0, at)$ è un isomorfismo lineare fra W_1 e W_2 (essendo per ipotesi $a \neq 0$), $f_{a,b}$ è un isomorfismo affine.

(iii) Sia $p = (t, 0, 0)$. Allora la retta affine $p + h\overrightarrow{pf_{a,b}(p)}$ è parametrizzata da

$$h \mapsto (t, 0, 0) + h(-t, 1, at + b) = (t - ht, h, aht + bh) .$$

Dunque, se $(x_0, y_0, z_0) \in X_{a,b}$, allora esistono $t, h \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x_0 = t - ht \\ y_0 = h \\ z_0 = aht + bh \end{cases} \tag{1}$$

Sostituendo, si verifica subito che la terna $(t - ht, h, aht + bh)$ soddisfa l'equazione

$$by^2 - axy - yz - by + z = 0 . \tag{2}$$

per cui l'insieme $X_{a,b}$ è contenuto nel supporto della quadrica $\mathcal{C}_{a,b}$.

Per verificare che i due insiemi coincidono, sia (x_0, y_0, z_0) un punto che verifica l'equazione (2). Se $y_0 \neq 1$, è immediato verificare che, posti $h = y_0$ e $t = x_0/(1 - y_0)$, il sistema (1) è verificato, per cui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}_{a,b}$. Inoltre, se $y_0 = 1$ dall'equazione (2) si deduce $x_0 = 0$ (si ricordi che $a \neq 0$), per cui il sistema (1) è verificato ponendo $h = 1$ e $t = a^{-1}z_0 - a^{-1}b$. Abbiamo così dimostrato che $X_{a,b}$ è il supporto della quadrica $\mathcal{C}_{a,b}$.

(iv) La quadrica $\mathcal{C}_{a,b}$ è rappresentata dalla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ -a & 2b & -1 & -b \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con le usuali notazioni, si ha che A, avendo prima e terza colonna linearmente dipendenti, è non invertibile, per cui $\operatorname{rk} A \leq 2$ e $i_0(A) \geq 1$. D'altronde, il determinante del minore 2×2 dato dalle prime 2 righe e le prime due colonne di A è negativo, per cui $\operatorname{rk} A = 2$ e $i_+(A) \geq 1$, $i_-(A) \geq 1$. Se ne deduce che $\omega(A) = 2$. Inoltre, $\det Q = a^2 > 0$, per cui $\operatorname{rk} Q = 4$. Essendo non degenere, il prodotto scalare definito da Q ha indice di Witt $\omega(Q) \leq (\dim \mathbb{R}^4)/2 = 2$. D'altronde, $\omega(Q) \geq \omega(A) = 2$. Dunque la quaterna $(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} Q, \omega(A), \omega(Q)) = (2, 4, 2, 2)$ non dipende da a e b, e ciò conclude la dimostrazione. In particolare abbiamo così visto che $X_{a,b}$ è il supporto di un paraboiloide iperbolico (o sella).