LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2019-2020
Secondo Appello - 30/01/2019 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tavole di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $(C \vee A) \ \wedge \ \neg(A \vee \neg(C \wedge \neg B \Rightarrow A)) \ \Rightarrow \ B \vee A$
2. $(C \vee A) \ \wedge \ \neg(A \vee (C \wedge \neg B \Rightarrow A)) \ \Rightarrow \ B \vee A$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia. Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\begin{array}{ll}
 & (C \vee A) \wedge \underline{\neg(A \vee \neg(C \wedge \neg B \Rightarrow A))} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (C \vee A) \wedge \neg A \wedge \underline{(C \wedge \neg B \Rightarrow A)} \\
\equiv & \{(\text{Contronominale})\} \\
 & (C \vee A) \wedge \underline{\neg A \wedge (\neg A \Rightarrow \neg C \vee B)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\
 & \underline{(C \vee A) \wedge (\neg C \vee B)} \\
\Rightarrow & \{(\text{Risoluzione})\} \\
 & A \vee B
\end{array}$$

2. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $A = \mathbf{F}$, $B = \mathbf{F}$, $C = \mathbf{T}$.

ESERCIZIO 2
Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di costante $\mathcal{C} = \{p, g\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{A(-,-), C(-,-)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le persone, e

- $\alpha(p)$ è la persona Paolo;
- $\alpha(g)$ è la persona Gianni;
- $\alpha(A)(d_1, d_2)$ è vera se e solo se le persone d_1 e d_2 sono amici;
- $\alpha(C)(d_1, d_2)$ è vera se e solo se le persone d_1 e d_2 si conoscono.

Formalizzare il seguente enunciato usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ rispetto all'interpretazione I:

"Tutti gli amici di Paolo si conoscono, invece non tutti gli amici di Gianni si conoscono."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x\,.\,(\forall y\,.\,A(x,p) \wedge A(y,p) \;\Rightarrow\; C(x,y))) \wedge (\exists x\,.\,(\exists y\,.\,A(x,g) \wedge A(y,g) \wedge \neg C(x,y)))$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$(\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P \vee Q) \vee (\forall x\,.\,R)$$

Suggerimento: potrebbe essere utile la legge $A \Rightarrow B \vee C \;\equiv\; A \wedge \neg B \Rightarrow C$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Presentiamo due possibili soluzioni.

(A) $\quad (\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P \vee Q) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv \quad \{\text{Legge } A \Rightarrow B \vee C \;\equiv\; A \wedge \neg B \Rightarrow C\}$

$\quad \big((\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q)\big) \wedge \underline{\neg(\forall x\,.\,R)} \Rightarrow (\exists x\,.\,P \vee Q)$

$\equiv \quad \{\text{(De Morgan)}\}$

$\quad \big((\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q)\big) \wedge (\exists x\,.\,\neg R) \Rightarrow (\exists x\,.\,P \vee Q)$

Per Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare la seguente implicazione, dove d è una nuova costante:

$\quad \big((\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q)\big) \wedge (\exists x\,.\,\neg R) \wedge \neg R[^d/_x] \Rightarrow (\exists x\,.\,P \vee Q)$

Partiamo dalla premessa:

$\quad \big(\underline{(\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q)}\big) \wedge (\exists x\,.\,\neg R) \wedge \neg R[^d/_x]$

$\Rightarrow \quad \{(\forall : \vee), \text{ occorrenza positiva}\}$

$\quad (\forall x\,.\,P \vee Q) \wedge \underline{(\exists x\,.\,\neg R)} \wedge \neg R[^d/_x]$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Sempl-}\wedge), \text{ occorrenza positiva}\}$

$\quad \underline{(\forall x\,.\,P \vee Q)} \wedge \neg R[^d/_x]$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Elim-}\forall) \text{ con } d \text{ termine chiuso, occorrenza positiva}\}$

$\quad (P \vee Q)[^d/_x] \wedge \neg R[^d/_x]$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Sempl-}\wedge), \text{ occorrenza positiva}\}$

$\quad (P \vee Q)[^d/_x]$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Introduzione-}\exists), \text{ occorrenza positiva}\}$

$\quad (\exists x\,.\,P \vee Q)$

(B) $\quad (\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P \vee Q) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

$\quad \neg\big(\underline{(\forall x\,.\,P) \vee (\forall x\,.\,Q)}\big) \vee (\exists x\,.\,P \vee Q) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\Leftarrow \quad \{(\forall : \vee), \text{ occorrenza negativa}\}$

$\quad \underline{\neg(\forall x\,.\,P \vee Q)} \vee (\exists x\,.\,P \vee Q) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv \quad \{\text{(De Morgan)}\}$

$\quad \underline{(\exists x\,.\,\neg(P \vee Q)) \vee (\exists x\,.\,P \vee Q)} \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv \quad \{(\exists : \vee)\}$

$\quad (\exists x\,.\,\underline{\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)}) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv \quad \{\text{(Terzo Escluso)}\}$

$\quad (\exists x\,.\,\mathbf{T}) \vee (\forall x\,.\,R)$

$\equiv$ $\{$(Eliminazione-$\Rightarrow$), al contrario$\}$

$\underline{\neg(\forall x\,.\,R)} \Rightarrow (\exists x\,.\,\mathbf{T})$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$(\exists x\,.\,\neg R) \Rightarrow (\exists x\,.\,\mathbf{T})$

$\equiv$ $\{\neg R \Rightarrow \mathbf{T}$, $\neg R$ occorre positivamente in $(\exists x\,.\,\neg R)$, Sost. Implicazione.$\}$

$\mathbf{T}$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a: array [0, n) of int** e **b: array [0, m) of int**):

"Ogni elemento di **a** è uguale alla somma di due o di tre elementi contigui di **b**"

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$\big(\forall x\,.\,x \in [0,n) \;\Rightarrow\; (\exists i\,.\,i \in [0,m-2) \wedge a[x] = b[i] + b[i+1]) \vee$$
$$(\exists i\,.\,i \in [0,m-3) \wedge a[x] = b[i] + b[i+1] + b[i+2])\big)$$

ESERCIZIO 5
Assumendo **a: array [0, n) of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

$\{c = 1 \;\wedge\; y = 0\}$
$\{\mathsf{Inv}$: $y \in [0,n] \;\wedge\; \big((c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,y) \wedge a[i] = 0)\big)\}\{$t: $n - y\}$
```
while y < n do
    c, y := c * a[y], y+1
endw
```
$\{(c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,n) \wedge a[i] = 0)\}$

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l'ipotesi di invarianza.
Suggerimento: Si ricordi la seguente proprietà della moltiplicazione: $(a * b = 0) \equiv (a = 0) \vee (b = 0)$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : y \in [0,n] \;\wedge\; \big((c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,y) \wedge a[i] = 0)\big)$
Funzione di terminazione $t : n - y$

1. **Ipotesi di Invarianza**:

$\{y \in [0,n] \;\wedge\; \big((c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,y) \wedge a[i] = 0)\big) \wedge y < n\}$
```
c, y := c * a[y], y+1
```
$\{y \in [0,n] \;\wedge\; \big((c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,y) \wedge a[i] = 0)\big) \wedge def(y < n)\ \}$

2. **Ipotesi di Progresso**:

$\{y \in [0,n] \;\wedge\; \big((c = 0) \equiv (\exists i\,.\,i \in [0,y) \wedge a[i] = 0)\big) \wedge y < n \;\wedge\; n - y = V\}$
```
c, y := c * a[y], y+1
```
$\{n - y < V\}$

Dimostriamo l'ipotesi di invarianza applicando la regola dell' **Assegnamento Multiplo**. Quindi dobbiamo verificare che

$$\begin{gathered} y \in [0,n] \ \wedge \ \big((c=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y) \wedge a[i]=0)\big) \ \wedge \ y<n \\ \Rightarrow \\ def(c*a[y]) \wedge def(y+1) \ \wedge \ \big(Inv \wedge def(y<n)\big) \left[{}^{c*a[y],y+1}/c,y\right] \end{gathered}$$

Partiamo dalla conseguenza:

$\quad \underline{def(c*a[y]) \wedge def(y+1)} \ \wedge \ \big(Inv \wedge def(y<n)\big) \left[{}^{c*a[y],y+1}/c,y\right]$

$\equiv \quad$ {definizione di def}

$\quad \underline{y \in dom(a)} \ \wedge \ \big(\underline{Inv} \wedge def(y<n)\big) \left[{}^{c*a[y],y+1}/c,y\right]$

$\equiv \quad$ {**Ip**: $y \in [0,n], y<n, dom(a)=[0,n)$, definizione di Inv}

$\quad \big(y \in [0,n] \ \wedge \ \big((c=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y) \wedge a[i]=0)\big) \wedge def(y<n)\big) \left[{}^{c*a[y],y+1}/c,y\right]$

$\equiv \quad$ {Sostituzione}

$\quad \underline{y+1 \in [0,n]} \ \wedge \ \big((c*a[y]=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y] \wedge a[i]=0)\big) \wedge \underline{def(y+1<n)}$

$\equiv \quad$ {**Ip**: $y \in [0,n], y<n$, definizione di def}

$\quad (c*a[y]=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y] \wedge a[i]=0)$

$\equiv \quad$ {(Intervallo-$\exists$}

$\quad (c*a[y]=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y) \wedge a[i]=0) \vee (a[y]=0)$

$\equiv \quad$ {(Proprietà della moltiplicazione: $(a*b=0) \equiv (a=0) \vee (b=0)$}

$\quad (c=0) \vee (a[y]=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y) \wedge a[i]=0) \vee (a[y]=0)$

$\equiv \quad$ {**Ip**: $(c=0) \equiv (\exists i \,.\, i \in [0,y) \wedge a[i]=0)$}

$\quad (c=0) \vee (a[y]=0) \equiv (c=0) \vee (a[y]=0)$

$\equiv \quad$ {(Riflessivita' di $\equiv$)}

$\quad$ **T**

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of int** e **b: array [0, n) of int**):

$\{\ x \in [1,n-1) \ \wedge \ a[x] \geq 0 \ \wedge \ b[x] \geq 0 \ \wedge \ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow (a[i] < b[i+1]) \vee (b[i]=0))\}$

```
if (b[x]=0)
   then x:= x+1
   else a[x-1]:= a[x] mod b[x]
fi
```

$\{(\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow (a[i] < b[i+1]) \vee (b[i]=0))\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando la regola del **Condizionale** è sufficiente verificare:

(6.1) $x \in [1,n-1) \wedge a[x] \geq 0 \wedge b[x] \geq 0 \wedge (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i]=0) \ \Rightarrow \ def(b[x]=0)$

(6.2) $\{\ x \in [1,n-1) \wedge a[x] \geq 0 \wedge b[x] \geq 0 \wedge (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i]=0) \ \wedge \ b[x]=0\}$

```
x:= x+1
```

$\{\ (\forall i \,.\, i \in [0,x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i]=0)\ \}$

(6.3) $\{\ x \in [1, n-1) \wedge a[x] \geq 0 \wedge b[x] \geq 0 \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\ \wedge\ \neg(b[x] = 0)\}$

```
a[x-1]:= a[x] mod b[x]
```

$\{\ (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\ \}$

(6.1) Partiamo dalla conseguenza

$def(b[x] = 0)$

$\equiv$ {definizione di def}

$x \in dom(b)$

$\equiv$ { **Ip**: $x \in [1, n-1)$, $dom(b) = [0, n)$}

T

(6.2) Per dimostrare la tripla, applicando la regola dell'**Assegnamento**, è sufficiente verificare che:

$$x \in [1, n-1) \wedge a[x] \geq 0 \wedge b[x] \geq 0 \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\ \wedge\ b[x] = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$def(x+1)\ \wedge\ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)$$

Partiamo dalla conseguenza

$def(x+1)\ \wedge\ (\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)$

$\equiv$ {definizione di def, (Unità)}

$(\forall i \,.\, i \in [0, x] \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)$

$\equiv$ {(Intervallo-$\forall$)}

$(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\ \wedge\ (a[x] < b[x+1] \vee b[x] = 0)$

$\equiv$ {**Ip**: $(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)$}

$a[x] < b[x+1] \vee b[x] = 0$

$\equiv$ {**Ip**: $b[x] = 0$}

$a[x] < b[x+1] \vee \mathbf{T}$

$\equiv$ {(Assorbimento)}

T

(6.3) Per dimostrare la tripla, applicando la regola dell' **Aggiornamento Selettivo** , è sufficiente verificare che:

$$x \in [1, n-1) \wedge a[x] \geq 0 \wedge b[x] \geq 0 \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\ \wedge\ \neg(b[x] = 0)$$
$$\Rightarrow$$
$$def(x-1)\ \wedge\ def(a[x]\, mod\, b[x]) \wedge x-1 \in dom(a) \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)[^c/_a]$$

dove $c = a[^{a[x]\ mod\ b[x]}/_{x-1}]$.

Partiamo dalla conseguenza

$\underline{def(x-1)\ \wedge\ def(a[x]\, mod\, b[x])} \wedge x-1 \in dom(a) \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow c[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)$

$\equiv$ {definizione di def, (Unità)}

$$
\begin{aligned}
& \underline{x \in dom(a) \wedge x \in dom(b)} \wedge \neg(b[x] = 0) \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow c[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0) \\
\equiv \quad & \{ \textbf{ Ip}\text{: } x \in [1, n-1),\ dom(a) = [0, n),\ dom(b) = [0, n),\ \text{(Unità)}\} \\
& \underline{\neg(b[x] = 0)} \wedge (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow c[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0) \\
\equiv \quad & \{ \textbf{ Ip}\text{: } \neg(b[x] = 0),\ \text{(Unità)}\} \\
& \underline{(\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow c[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)} \\
\equiv \quad & \{\text{(Intervallo-}\forall\text{)}\} \\
& \underline{(\forall i \,.\, i \in [0, x-1) \Rightarrow c[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0) \wedge (c[x-1] < b[x] \vee b[x-1] = 0)} \\
\equiv \quad & \{\text{Def. di } c\} \\
& \underline{(\forall i \,.\, i \in [0, x-1) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)} \wedge (a[x] \mathit{ mod } b[x] < b[x] \vee b[x-1] = 0) \\
\equiv \quad & \{\textbf{Ip}\text{: } (\forall i \,.\, i \in [0, x) \Rightarrow a[i] < b[i+1] \vee b[i] = 0)\} \\
& \underline{a[x] \mathit{ mod } b[x] < b[x]} \vee b[x-1] = 0 \\
\equiv \quad & \{ \textbf{ Ip}\text{: } a[x] \geq 0,\ b[x] \geq 0,\ \neg(b[x] = 0) \ \} \\
& \underline{\mathbf{T} \vee b[x-1] = 0} \\
\equiv \quad & \{\text{(Assorbimento)}\} \\
& \mathbf{T}
\end{aligned}
$$