Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 3/7/2014

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e sia $f \in End(V)$. Si provi che f è diagonalizzabile se e solo se per ogni sottospazio U f-invariante esiste un sottospazio W f-invariante tale che $V = U \oplus W$.

Esercizio 2.
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia Φ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $g \in End(V)$ un fissato endomorfismo di rango $n-k$. Sia

$$E = \{f \in End(V) \mid g \circ f = 0, f \text{ è autoaggiunta rispetto a } \Phi \}.$$

(i) Si verifichi che E è un sottospazio vettoriale di $End(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

(ii) Si fissi $V = \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, -x-y-z)$ e $\Phi(X,Y) = {}^tXAY$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si dica se g è diagonalizzabile.

(b) Si dica se $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} g)^{\perp}$ (dove l'ortogonale è rispetto a Φ).

(c) Si costruisca esplicitamente una $f \in E$ di rango 2.

(d) Si provi che non esiste $f \in E$ di rango 2 tale che f e g sono simultaneamente diagonalizzabili.

Esercizio 3.
Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di $\mathbb{R}^2$ con centro in C_0, e siano P, Q_1, Q_2 punti di $\mathcal{C}$ non allineati. Sia M il punto medio tra Q_1 e Q_2, e si supponga che $C_0 \neq M$. Sia f un'affinità di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(P) = P$, $f(Q_1) = Q_2$ e $f(Q_2) = Q_1$.

(i) Si mostri che, se $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, allora C_0, M, P sono allineati.

(ii) Si mostri che esiste un'affinità $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(Q_1) = (1,1)$, $g(Q_2) = (-1,1)$, e $g(P) = (0,0)$.

(iii) Si mostri che, se C_0, M, P sono allineati, allora $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Soluzioni

Esercizio 1.

Supponiamo che f sia diagonalizzabile e che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V di autovettori per f. Sia U un sottospazio di V f-invariante e $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una sua base. Utilizzando l'algoritmo di estrazione di una base da un insieme di generatori, dall'insieme $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n\}$ di generatori di V si può estrarre una base per V che risulterà del tipo $\{u_1, \ldots, u_k, v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}}\}$. Il sottospazio $W = Span(v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}})$ è allora un supplementare di U f-invariante.

Viceversa supponiamo che per ogni sottospazio U f-invariante esista un sottospazio W f-invariante tale che $V = U \oplus W$. Proviamo che f è diagonalizzabile per induzione su $n = \dim V$. Poiché la tesi è ovvia per $n = 1$, supponiamo $n \geq 2$ e proviamo il passo induttivo. Sia v_1 un autovettore per f (tale autovettore esiste certamente essendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sia $U_1 = Span(v_1)$. Per ipotesi esiste un sottospazio W_1 di V f-invariante e tale che $V = U_1 \oplus W_1$.

Proviamo che è possibile applicare l'ipotesi induttiva all'endomorfismo $f|_{W_1}$. Sia dunque U un sottospazio di W_1 che sia $f|_{W_1}$-invariante, $\dim U = k$. Essendo U anche f-invariante, per ipotesi esiste un sottospazio Z di V tale che $f(Z) \subseteq Z$ e $V = U \oplus Z$. Vediamo che $W_1 \cap Z$ è un supplementare di U in W_1 che risulta $f|_{W_1}$-invariante. Infatti, poiché $W_1 + Z \supseteq U + Z = V$, si ha $\dim(W_1 + Z) = n$. Dalla formula di Grassmann si ricava allora che $\dim(W_1 \cap Z) = n - k - 1$, per cui $\dim U + \dim(W_1 \cap Z) = n - 1$. Inoltre $U \cap (W_1 \cap Z) \subseteq U \cap Z = \{0\}$, per cui, essendo $\dim W_1 = n - 1$, si ha $U \oplus (W_1 \cap Z) = W_1$, ossia $W_1 \cap Z$ è un supplementare di U in W_1. Inoltre dal fatto che $f(Z) \subseteq Z$ e $f(W_1) \subseteq W_1$ segue subito che $W_1 \cap Z$ è f-invariante e dunque anche $f|_{W_1}$-invariante.

Dunque per l'ipotesi induttiva $f|_{W_1}$ è diagonalizzabile; se $\{w_2, \ldots, w_n\}$ è una base di W_1 di autovettori per $f|_{W_1}$, allora $\{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ è una base di V di autovettori per f e dunque f è diagonalizzabile.

Soluzione alternativa 1. Presentiamo una dimostrazione alternativa del fatto che, se f non è diagonalizzabile, allora esiste un sottospazio f-invariante di V che non ammette alcun supplementare f-invariante. Poiché $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e f non è diagonalizzabile, il polinomio minimo di f ha la forma $m(t) = (t - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{s_k}$, con $s_1 > 1$. Per ogni $i = 1, \ldots, k$ sia V_i' l'autospazio generalizzato $V_i' = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{s_i}$, e sia $V_1 = \ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$ l'autospazio relativo a λ_1. Ovviamente V_1 è f-invariante, per cui per concludere è sufficiente dimostrare che V_1 non ammette un supplementare f-invariante.

Sia per assurdo W un tale supplementare, e denotiamo con V_1'' il sottospazio $V_1'' = \ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^2$. Poiché $\dim W = \dim V - \dim V_1$ e $V_1 \subsetneq V_1''$, si ha $\dim V_1'' + \dim W > \dim V$, per cui esiste $v \in V_1'' \cap W$ con $v \neq 0$. Poiché $W \cap V_1 = \{0\}$, si ha automaticamente $v \in V_1'' \setminus V_1$. Ora, poiché W è f-invariante si ha $(f - \lambda_1 \mathrm{Id})(v) \in W$, mentre da $v \in V_1''$ si deduce che $(f - \lambda_1 \mathrm{Id})(v) \in V_1$. Poiché $W \cap V_1 = \{0\}$ se ne deduce che $(f - \lambda_1 \mathrm{Id})(v) = 0$, cioè $v \in V_1$, il che è assurdo.

Soluzione alternativa 2. Presentiamo una dimostrazione alternativa del fatto che, se ogni sottospazio f-invariante di V ammette un supplementare f-invariante, allora f è diagonalizzabile.

Sia $U \subseteq V$ la somma degli autospazi di f. È facile verificare che U è f-invariante, per cui per ipotesi esiste un sottospazio f-invariante W tale che $V = U \oplus W$. Poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, se $\dim W$ fosse maggiore di 0, allora l'endomorfismo $f|_W \colon W \to W$ ammetterebbe un autovettore. Tale autovettore sarebbe un elemento non nullo di $U \cap W$, il che è assurdo. Dunque $W = \{0\}$, per cui $V = U$, e V è la somma degli autospazi di f. Dunque f è diagonalizzabile.

Soluzione alternativa 3. Presentiamo una dimostrazione alternativa del fatto che, se ogni sottospazio f-invariante di V ammette un supplementare f-invariante, allora f è diagonalizzabile. Proviamo per induzione su k (dove $1 \leq k \leq n$) il seguente enunciato: esistono k

autovettori $v_1, \dots, v_k$ per f che siano linearmente indipendenti. Ovviamente, per $k = n$ ciò equivale alla tesi.

Per $k = 1$, è sufficiente osservare che, poiché $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'endomorfismo f ammette un autovettore, che è indipendente in quanto non nullo per definizione. Supponiamo allora che la tesi sia vera per $k < n$, e proviamola per $k+1$. Per ipotesi induttiva esistono k autovettori $v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti. Sia $U = \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_k\rangle$. Allora U è f-invariante, per cui esiste un sottospazio W di V che sia f-invariante e sia tale che $V = U \oplus W$. Poiché $k = \dim U < n$, si ha $\dim W > 0$, per cui $f|_W$ ammette un autovettore v_{k+1}. Poiché $U \cap W = \{0\}$, i vettori $v_1, \dots, v_{k+1}$ sono linearmente indipendenti, e ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 2.

(i) Ovviamente l'endomorfismo nullo appartiene ad E. Se $f_1, f_2 \in E$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g \circ f_1) + \lambda_2 (g \circ f_2) = 0 + 0 = 0$; inoltre $\Phi((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v), w) = \Phi(\lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v), w) = \lambda_1 \Phi(f_1(v), w) + \lambda_2 \Phi(f_2(v), w) = \lambda_1 \Phi(v, f_1(w)) + \lambda_2 \Phi(v, f_2(w)) = \Phi(v, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(w))$ per ogni $v, w \in V$, ovvero $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ è autoaggiunta e quindi $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in E$. Dunque E è un sottospazio vettoriale di $End(V)$.

Per calcolare la dimensione di E utilizziamo l'isomorfismo tra $End(V)$ e $M(n, \mathbb{R})$ che si ha ogni volta che si fissa una base di V. Come noto, la condizione che f è autoaggiunta è equivalente al fatto che la matrice associata ad f rispetto ad una base ortonormale per Φ è simmetrica, mentre la condizione $g \circ f = 0$ è equivalente alla condizione $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$. Dato che $\dim \operatorname{Im} g = n - k$, si ha che $\dim \operatorname{Ker} g = k$. Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortonormale di $\operatorname{Ker} g$ che completiamo ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale di V. Sia $\mathcal{M}_\mathcal{B} \colon End(V) \to M(n, \mathbb{R})$ l'isomorfismo indotto dalla base $\mathcal{B}$ e calcoliamo $\dim \mathcal{M}_\mathcal{B}(E) = \dim E$.

Per quanto ricordato sopra, $f \in E$ se e solo se la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ è una matrice a blocchi del tipo

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con N matrice simmetrica $k \times k$. In altre parole

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) \mid N \in M(k, \mathbb{R}), {}^tN = N \right\}.$$

Pertanto $\dim E = \dim \mathcal{M}_\mathcal{B}(E) = \frac{k(k+1)}{2}$.

(ii) Si verifica subito che Φ è definito positivo, che $\operatorname{Im} g = Span(1, 1, -1)$ (e dunque $\operatorname{rk} g = 1$) e che $\operatorname{Ker} g = \{x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Il polinomio caratteristico di g è $t^2(1-t)$; poiché l'autospazio relativo all'autovalore 0, ossia $\operatorname{Ker} g$, ha dimensione 2, g è diagonalizzabile.

b) Essendo Φ non degenere, $\dim(\operatorname{Ker} g)^\perp = 3 - \dim \operatorname{Ker} g = 1$. Con facili conti si trova che i vettori $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, -1)$ sono una base ortogonale di $\operatorname{Ker} g$ e che $v_3 = (1, -3, -1) \in (\operatorname{Ker} g)^\perp$. Dunque $(\operatorname{Ker} g)^\perp = Span(1, -3, -1)$; in particolare $\operatorname{Im} g \neq (\operatorname{Ker} g)^\perp$.

c) Poiché $\|v_1\| = 1, \|v_2\| = 3, \|v_3\| = 6$, l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, \frac{v_2}{\sqrt{3}}, \frac{v_3}{\sqrt{6}}\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Per quanto detto nel punto (i) l'endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tale che $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a E ed ha evidentemente rango 2.

d) Ogni endomorfismo di E, in quanto autoaggiunto, è diagonalizzabile e soddisfa la condizione $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Inoltre per ogni $f \in E$ di rango 2 si ha $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ da cui segue, visto che $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Supponiamo per assurdo che esista $f \in E$ di rango 2 tale che f e g sono simultaneamente diagonalizzabili. In tal caso f e g commutano e dunque $f \circ g = g \circ f = 0$. Da ciò segue che $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp = (\operatorname{Ker} g)^\perp$ e dunque, ragionando sulle dimensioni, $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} g)^\perp$, che contraddice quanto provato nel punto b).

Esercizio 3.

(i) Poiché le affinità conservano il punto medio, si ha $f(M) = M$. Inoltre $f(\mathcal{C})$ è una conica a centro con centro nel punto $f(C_0)$; se per ipotesi $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, allora $f(C_0) = C_0$. Se i punti C_0, M, P non fossero allineati, essi costituirebbero un riferimento affine di $\mathbb{R}^2$ e f sarebbe l'identità su un riferimento affine. Dunque si avrebbe $f = id$, il che è assurdo visto che $f(Q_1) = Q_2$.

(ii) I punti Q_1, Q_2, P, essendo non allineati, formano un riferimento affine di $\mathbb{R}^2$, così come i punti $(1,1), (-1,1), (0,0)$. Esiste dunque un'affinità di $\mathbb{R}^2$ con la proprietà richiesta.

(iii) Per quanto visto al punto (ii), a meno di affinità posso supporre che sia $Q_1 = (1,1)$, $Q_2 = (-1,1)$ e $P = (0,0)$; in tal modo si ha $M = (0,1)$. Poiché per ipotesi i punti C_0, M, P sono allineati, allora $C_0 = (0, \alpha)$ con $\alpha \neq 1$. Dal fatto che $f(P) = P$, si deduce che f è lineare; inoltre dal comportamento di f su Q_1, Q_2 si deduce immediatamente che

$$f(x,y) = (-x, y)\ .$$

Sia $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix}$ la matrice simmetrica che rappresenta $\mathcal{C}$. Poiché $\mathcal{C}$ passa per l'origine si ha $c = 0$. Dal fatto che $C_0 = (0, \alpha)$ e che $AC_0 = -B$ si deduce che Q ha la forma

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -\alpha a_2 \\ a_2 & a_3 & -\alpha a_3 \\ -\alpha a_2 & -\alpha a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imponendo il passaggio da $(1,1)$ e $(-1,1)$ si ottengono le equazioni

$$a_1 + 2(1-\alpha)a_2 + (1-2\alpha)a_3 = 0\,, \quad a_1 - 2(1-\alpha)a_2 + (1-2\alpha)a_3 = 0$$

da cui $(1-\alpha)a_2 = 0$ e dunque $a_2 = 0$ in quanto $\alpha \neq 1$. Allora la conica ha equazione

$$a_1 x^2 + a_3 y^2 - 2\alpha a_3 y = 0$$

ed è pertanto chiaramente invariante per f.