Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 4/9/2014

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.

a) Sia $A \in M(3, \mathbb{C})$ una matrice tale che $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si calcolino i possibili polinomi minimi di A.

b) Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice invertibile tale che esiste un intero $k \geq 1$ tale che $A^k = D$ con D matrice diagonale. Si dimostri che A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e siano $b_1, b_2 \colon V \times V \to \mathbb{R}$ due prodotti scalari su V. Si supponga che b_1 sia definito positivo e che b_2 sia non degenere. Sia inoltre E il sottospazio di $\mathrm{End}(V)$ costituito dagli endomorfismi che sono autoaggiunti sia rispetto a b_1, sia rispetto a b_2.

a) Si dimostri che, per ogni $v \in V$, esiste un unico elemento $f(v) \in V$ tale che

$$\forall w \in V \qquad b_2(v, w) = b_1(f(v), w)$$

e si verifichi che l'applicazione $f \colon V \to V$ così definita è un endomorfismo di V.

b) Si dimostri che f è autoaggiunta rispetto a b_1.

c) Sia $g \in End(V)$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto a b_1. Si provi che $g \in E$ se e solo se f e g commutano.

d) Si denotino con $n_1, \ldots, n_k$ le molteplicità algebriche degli autovalori di f. Si mostri che

$$\dim E = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + \ldots + \frac{n_k(n_k+1)}{2} .$$

Esercizio 3.

a) Siano L_1, L_2 piani distinti e paralleli in $\mathbb{R}^3$. Si provi che, per ogni coppia di rette sghembe r_1, r_2 con $r_1 \subset L_1$ e $r_2 \subset L_2$, la distanza $d(r_1, r_2)$ fra le due rette coincide con la distanza $d(L_1, L_2)$ fra i due piani.

b) Si considerino le rette di $\mathbb{R}^3$

$$r_1 = \{(t+1, 3t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad r_2 = \{(3-t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Si determinino le equazioni cartesiane di due piani H_1, H_2 paralleli e tali che $r_1 \subset H_1$ e $r_2 \subset H_2$.

(ii) Si determini una retta r_3 sghemba sia con r_1 che con r_2 e tale che $d(r_1, r_3) = d(r_2, r_3)$.

<u>**Soluzioni**</u>

Esercizio 1.

a) Il polinomio minimo della matrice A^2 è $t(t-1)$, per cui $A^2(A^2-I)=0$, ossia $A^2(A-I)(A+I)=0$, e dunque $t^2(t-1)(t+1)\in I(A)$.

Se λ è autovalore per A, allora λ^2 è autovalore per A^2, per cui A può avere come autovalori solo 0, 1 o -1. Certamente 0 è autovalore per A perché $\det A^2=0$ e dunque $\det A=0$; in particolare t divide il polinomio minimo m_A di A. D'altra parte 0 non può essere l'unico autovalore di A, altrimenti A sarebbe nilpotente e così anche A^2, il che evidentemente non è vero. Dunque, oltre all'autovalore 0, A ha almeno un autovalore non nullo.

Se t^2 dividesse m_A, allora la forma di Jordan $J(A)$ di A conterrebbe un blocco relativo a 0 di ordine 2, ossia avremmo $J(A)=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$, con $\lambda\in\{1,-1\}$. Ma ciò è impossibile perché avremmo $\mathrm{rk}(J(A)^2)=1$ e $\mathrm{rk}\,A^2=2$, mentre le matrici $J(A)^2$ e A^2 sono simili.

Di conseguenza il polinomio minimo di A può solo essere $t(t-1)$ oppure $t(t+1)$ oppure $t(t-1)(t+1)$. Ciascuno di tali casi è effettivamente realizzabile, ad esempio considerando le matrici

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

b) Se $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m I_{d_m}\end{pmatrix}$, il polinomio minimo di D è $m_D(t)=(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_m)$. Poiché $m_D(D)=0$ e $D=A^k$, allora $(A^k-\lambda_1 I)\cdot\ldots\cdot(A^k-\lambda_m I)=0$, ossia il polinomio $g(t)=(t^k-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t^k-\lambda_m)$ appartiene all'ideale di A.

Essendo A invertibile, anche D lo è, per cui gli autovalori di D sono tutti non nulli e quindi per ogni $i=1,\ldots,m$ l'autovalore complesso λ_i ha esattamente k radici k-esime distinte che denotiamo con $\mu_{i,1},\ldots,\mu_{i,k}$. Allora $g(t)=(t-\mu_{1,1})\ldots(t-\mu_{1,k})\ldots(t-\mu_{m,1})\ldots(t-\mu_{m,k})$. Il polinomio minimo di A, essendo un divisore di $g(t)$, è dunque prodotto di fattori di primo grado a due a due coprimi, per cui A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.

a) Per ogni $v\in V$ l'applicazione $L_v\colon V\to\mathbb{R}$ definita da $L_v(w)=b_2(v,w)$ è lineare. Poiché b_1 è non degenere, l'applicazione $F_1\colon V\to V^*$ definita da $F_1(x)(w)=b_1(x,w)$ è un isomorfismo. Pertanto $\forall v\in V$ il funzionale L_v appartiene all'immagine di F_1, ossia esiste un unico vettore, che denotiamo con $f(v)$, tale che $L_v=F_1(f(v))$. Di conseguenza per ogni $w\in V$ si ha $L_v(w)=F_1(f(v))(w)$, ossia $b_2(v,w)=b_1(f(v),w)$.

Verifichiamo ora che f è lineare. Per ogni $v_1,v_2,w\in V$ e per ogni $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ si ha

$$b_1(f(a_1v_1+a_2v_2),w)=b_2(a_1v_1+a_2v_2,w)=a_1b_2(v_1,w)+a_2b_2(v_2,w)=$$

$$=a_1b_1(f(v_1),w)+a_2b_1(f(v_2),w)=b_1(a_1f(v_1)+a_2f(v_2),w).$$

Poiché b_1 è non degenere, segue che $f(a_1v_1+a_2v_2)=a_1f(v_1)+a_2f(v_2)$ e dunque f è lineare.

b) La definizione di f e la simmetria di b_1 e di b_2 implicano che, per ogni $v,w\in V$, si ha

$$b_1(f(v),w)=b_2(v,w)=b_2(w,v)=b_1(f(w),v)=b_1(v,f(w)).$$

c) Essendo l'endomorfismo g autoaggiunto rispetto a b_1, si ha che $b_1(g(v),w) = b_1(v,g(w))$ per ogni $v,w \in V$.
Se $g \in E$, ossia g è autoaggiunto anche rispetto a b_2, allora per ogni $v,w \in V$ si ha

$$b_1(f(g(v)),w) = b_2(g(v),w) = b_2(v,g(w)) = b_1(f(v)),g(w)) = b_1(g(f(v),w).$$

Essendo b_1 non degenere, segue che $f(g(v)) = g(f(v))$ per ogni $v \in V$ e dunque $f \circ g = g \circ f$.
Viceversa se f e g commutano, allora per ogni $v,w \in V$ si ha

$$b_2(g(v),w) = b_1(f(g(v)),w) = b_1(g(f(v),w) = b_1(f(v)),g(w)) = b_2(v,g(w)).$$

Dunque g è autoaggiunto anche rispetto a b_2, e quindi $g \in E$.

d) Siano $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ gli autovalori distinti di f. Poiché f è autoaggiunta rispetto a b_1, si ha che

$$V = V(\lambda_1,f) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k,f)$$

dove $\dim V(\lambda_i,f) = n_i$ e gli autospazi sono a due a due ortogonali (rispetto a b_1). Se $\mathcal{S}_i$ è una base di $V(\lambda_i,f)$ ortonormale rispetto a b_1, allora $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_k$ è una base ortonormale di V che induce l'isomorfismo $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \colon End(V) \to M(n,\mathbb{R})$ che associa ad ogni $g \in End(V)$ la matrice associata $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(g)$. Poiché E è isomorfo a $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(E)$, basta determinare $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(E)$ e calcolarne la dimensione.

Per quanto provato nel punto c), ogni $g \in E$ commuta con f, per cui $g(V(\lambda_i,f)) \subseteq V(\lambda_i,f)$ $\forall i = 1,\ldots,k$. Di conseguenza $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(g)$ è simmetrica (in quanto g è autoaggiunta rispetto a b_1) e diagonale a blocchi, ossia $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(g) = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$ con B_i matrice simmetrica $n_i \times n_i$. In altre parole, posto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix} \mid B_i \text{ matrice simmetrica } n_i \times n_i \right\},$$

si ha che $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(E) \subseteq W$. Quest'ultima inclusione è in realtà un'uguaglianza: infatti se $A \in W$ e g è l'endomorfismo tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(g) = A$, allora g è autoaggiunta rispetto a b_1 (perché A è simmetrica) e commuta con f (perché A commuta con $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k Id_{n_k} \end{pmatrix}$).
Per quanto provato nel punto c), si deduce che $g \in E$. Dunque

$$\dim E = \dim \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(E) = \dim W = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + \ldots + \frac{n_k(n_k+1)}{2}.$$

Esercizio 3.
a) Durante il corso è stato dimostrato che, essendo r_1 e r_2 sghembe, esiste un'unica retta r ortogonale sia a r_1 sia a r_2 e tale che $r \cap r_1 \neq \emptyset$, $r \cap r_2 \neq \emptyset$; inoltre tale retta interseca r_i in un punto P_i per $i = 1,2$, e $d(r_1,r_2) = d(P_1,P_2)$.

Siano $v = P_2 - P_1$, V_i la giacitura di r_i, e L la giacitura di L_1 e di L_2. Poiché $r_i \subseteq L_i$ si ha $V_i \subseteq L$, da cui $V_1 + V_2 \subseteq L$. Dal fatto che le rette r_1 e r_2 sono sghembe segue che V_1 e V_2 sono in somma diretta, per cui per motivi dimensionali $L = V_1 \oplus V_2$. Poiché r è perpendicolare a r_1 e r_2 si ha che v è perpendicolare sia a V_1 sia a V_2, per cui v è perpendicolare anche ad L.

Proviamo che $d(L_1, L_2) = d(P_1, P_2)$, da cui segue evidentemente la tesi.

Poiché $P_i \in L_i$, si ha ovviamente $d(L_1, L_2) \leq d(P_1, P_2)$. D'altronde, dati comunque $Q_1 \in L_1$ e $Q_2 \in L_2$, esistono $w_1, w_2 \in L$ tali che $Q_1 = P_1 + w_1$, $Q_2 = P_2 + w_2$, per cui

$$\begin{aligned} d(Q_1, Q_2)^2 = \|Q_1 - Q_2\|^2 = \|(P_1 + w_1) - (P_2 + w_2)\|^2 = \|v + (w_1 - w_2)\|^2 = \\ = \|v\|^2 + \|w_1 - w_2\|^2 \geq \|v\|^2 = d(P_1, P_2)^2 \ , \end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza della seconda riga si è usato il fatto che $v \perp (w_1 - w_2)$. Ciò dimostra che $d(L_1, L_2) \geq d(P_1, P_2)$, il che conclude la prova.

È possibile ottenere la tesi anche ragionando in coordinate come segue. Posto $k = d(L_1, L_2)$, a meno di una isometria (non lineare) di $\mathbb{R}^3$ si può supporre che $L_1 = \{z = 0\}$, che $L_2 = \{z = k\}$ e che la retta r_1 passi per l'origine. È allora evidente che $d(L_1, L_2) = k$. Inoltre, avremo

$$r_1 = \{(ta, tb, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad r_2 = \{(x_0 + s\alpha, y_0 + s\beta, k) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

con (a, b) e (α, β) vettori non nulli e non paralleli.

Poiché ovviamente $d(r_1, r_2) \geq d(L_1, L_2) = k$, è sufficiente mostrare che esistono un punto $P \in r_1$ ed un punto $Q \in r_2$ che abbiano le prime due coordinate uguali (nel qual caso la retta $L(P, Q)$ congiungente i due punti è ortogonale sia a L_1 che a L_2, e quindi anche alle rette r_1, r_2). In tal caso, infatti, si avrebbe $P - Q = (0, 0, -k)$, da cui $d(r_1, r_2) \leq d(P, Q) = k$, e dunque la tesi. Siano allora $P(t) = (ta, tb, 0)$ e $Q(s) = (x_0 + s\alpha, y_0 + s\beta, k)$ i generici punti di r_1 ed r_2, rispettivamente. Si ha $P(t) - Q(s) = (ta - s\alpha - x_0, tb - s\beta - y_0, -k)$, per cui siamo interessati a risolvere il sistema lineare $x_0 + s\alpha - ta = 0, y_0 + s\beta - tb = 0$. Poiché i vettori (a, b) e (α, β) non sono paralleli, la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -a \\ \beta & -b \end{pmatrix}$ è invertibile e quindi il sistema ammette una e una sola soluzione (s_0, t_0); i punti $P(t_0)$ e $Q(s_0)$ sono i punti cercati.

b) La retta r_1 è parallela al vettore $(1, 3, 2)$, mentre r_2 è parallela al vettore $(-1, 3, 1)$. Poiché si verifica facilmente che le due rette non si intersecano, esse sono sghembe.

(i) Se un piano di equazione $ax + by + cz = h$ contiene r_1 (risp. r_2), il vettore (a, b, c) è ortogonale a $(1, 3, 2)$ (risp. a $(-1, 3, 1)$). Poiché $(1, 1, -2)$ è ortogonale sia a $(1, 3, 2)$ che a $(-1, 3, 1)$, i piani L_h di equazione $x + y - 2z = h$ sono paralleli sia ad r_1 che ad r_2. Il punto $(1, 0, 0)$ di r_1 appartiene a L_h se e solo se $h = 1$, mentre il punto $(3, 0, 0)$ di r_2 appartiene a L_h se e solo se $h = 3$. Pertanto i piani H_1 e H_2 di equazione rispettivamente $x + y - 2z = 1$ e $x + y - 2z = 3$ soddisfano le proprietà richieste.

(ii) Se H_3 è un piano parallelo sia ad H_1 che ad H_2 e tale che $d(H_1, H_3) = d(H_2, H_3)$, ogni retta contenuta in H_3 e non parallela né a $(1, 3, 2)$ né a $(-1, 3, 1)$ soddisfa la proprietà richiesta.

Un tale piano H_3 ha equazione $x + y - 2z = h$ ed è facile verificare che $d(H_1, H_3) = d(H_2, H_3)$ se e solo se $h = 2$ (ad esempio osservando che la traslazione τ parallela al vettore $(1, 0, 0)$ porta H_1 in H_3 e H_3 in H_2, per cui, essendo τ un'isometria, $d(H_2, H_3) = d(\tau(H_3), \tau(H_1)) = d(H_3, H_1)$).

È immediato verificare che ad esempio la retta $r_3 = \{(t + 2, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ verifica la proprietà richiesta.