Lezione 13/03

Arg: Norme vettoriali e norme matriciali.

Condizionamento in problemi reali.

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \epsilon_m = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

Problema: Calcolo della soluzione di un sistema lineare.

INPUT $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$

OUTPUT $x \in \mathbb{R}^2 : Ax = b$

Condizionamento $A, b \rightsquigarrow$ deve essere rappresentato in macchina.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{bmatrix} \qquad \hat{a} = a(1+\epsilon_a)$$

$\vdots$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \qquad \hat{b}_1 = b_1(1+\epsilon_1)$$

$\vdots$

$$\underline{Ax = b} \rightsquigarrow \hat{A}\hat{x} = \hat{b}$$

Domanda: quanto $\hat{x}$ è vicino a x

(Attenzione la macchina non restituirà in generale $\hat{x}$

.... perché c'è anche l'errore algoritmico

- Come facciamo a misurare la distanza tra 2 vettori.

  .... e poi tra 2 matrici.

- Per misurare la distanza tra vettori introduciamo il concetto di norma vettoriale.

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice norma vettoriale se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0 \iff x = 0$
2. $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Esempio di norme vettoriali

norma euclidea $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$x = [x_1, x_2, \dots x_n]$

(lunghezza del vettore di componenti $[x_1 \dots x_n] = x$)

$f(x) = \|x\|_2$

Norma infinito $f(x) = \max_{i=1..m} |x_i| = \|x\|_\infty$

① $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) = \max_{i=1..m} |x_i| \geq 0$

$f(x) = \max_{i=1..m} |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0 \quad i = 1..m \iff x_i = 0$

② $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$

$f(\alpha x) = \max_{i=1..m} |\alpha x_i| = \max_{i=1..m} |\alpha||x_i|$

$= |\alpha| \max_{i=1..m} |x_i| = |\alpha| f(x)$

③ $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

$\max_{i=1..m} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1..m} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i=1..m} |x_i| + \max_{i=1..m} |y_i|$

$= f(x) + f(y)$

$f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$x = [2, 3]$ $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\|x\|_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\|x\|_\infty = 3$ $\|x\|_1 = |2| + |3| = 5$

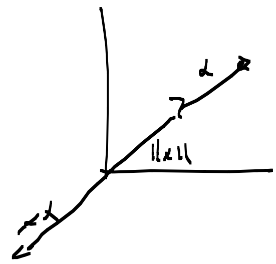
perché in generale le norme di uno stesso vettore hanno valori differenti

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ norma allora posso definire una distanza su $\mathbb{R}^n$

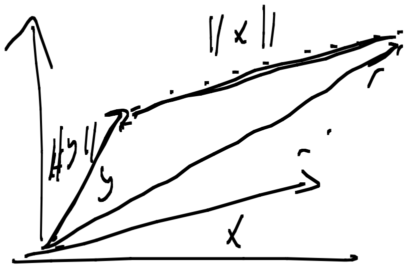
$$\boxed{\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = f(x-y)}$$

① $f(x) \ge 0$ e $f(x) = 0 \Rightarrow$ dist ≥ 0 e dist $= 0 \Leftrightarrow x = y$

② $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$



③ $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$



$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$dist(x,y) = \|x-y\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{10}$$

$$dist(x,y) = \|x-y\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3$$

$$dist(x,y) = \|x-y\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|_1 = 4$$

distanze associate sono valori numerici differenti

È possibile che x e y sono vicini in $\| \|_1$ e distanti in $\| \|_2$? $\underline{\underline{NO}}$

(equivalenza topologica delle norme)

Quantitativamente sono differenti no.
Qualitativamente stessi risultati

$\|x - y\|_1$ è piccolo $\Leftrightarrow$ $\|x-y\|_2$ è piccolo

$\|x - y\|_\infty$ è grande $\Leftrightarrow$ $\|x - y\|_1$ è grande

<u>distanza tra matrici</u> $\|A - B\|$

Norma matriciale.

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

① $f(A) \geq 0$ e $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad (a_{ij} = 0)$

② $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$

③ $f(A + B) \leq f(A) + f(B)$

④ $f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$

Difficile definire (trovare) norme matriciali.

Costruiamo norme matriciali a partire dalle <u>norme vettoriali</u>.

$f_V : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$ norma vettoriale

Def: Norma matriciale indotta (<u>compatibile</u>) la norma

$f_M : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_M(A) = \max_{f_v(x)=1} f_v(A \cdot x)$$

- prendere i vettori $x \in \mathbb{R}^n$: $f_v(x) = 1$ (infiniti)
- calcolare $A\,x$ (infiniti vettori)
- prendere $f_v(A\,x)$ (infiniti valori)
- calcolare il massimo di questi valori

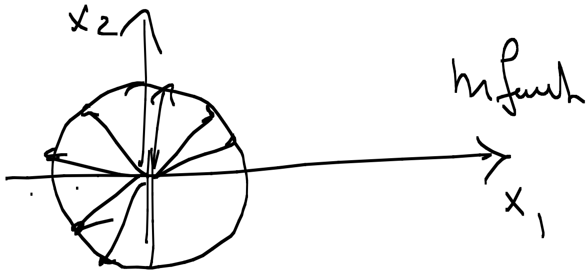
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \quad (n=2)$$

$$\|x\|_2 = 1 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 = 1$$



Definizione non è pratica (calcolabile)

$\Rightarrow$ Introduciamo dei Teoremi di caratterizzazione pratica norm

Teorema 1

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dove $\rho(B) = \max_{\lambda_i \in \text{spettro}(B)} |\lambda_i|$ (raggio spettrale di B)

(modulo dell'autovalore di modulo massimo)

Teorema 2

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

somma per riga

Teorema 3

$$\|A\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

somma per colonna

Calcolo la norma 1 e ∞ più semplice che calcolare la norma 2

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$\|A\|_\infty = \max\{10, 10, 4, 21\} = 21$

$\|A\|_1 = \max\{5, 9, 16, 15\} = 16$

$\|A\|_2 = ?$ complicato perché:

$=$ calcolare $A^T \cdot A$

$=$ calcolare gli autovalori di $A^T A$ (HARD!!)

$=$ determinare il valore dell'autovalore di modulo massimo

Vantaggio delle norme naturali $\rightarrow$ ulteriore proprietà

Teorema: Sia $\|\cdot\|$ una norma vettoriale e $\|\cdot\|$ la norma matriciale indotta. Allora

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\|Av\|} \le \|A\|\,\|v\|$$

norma vettoriale $\qquad$ norma matriciale

Dim: $\underline{v=0}$ $\quad \|Av\| = \|0\| = 0$

$$\|A\|\cdot\|v\| = \|A\|\cdot 0 = 0$$

Vale l'uguaglianza e quindi il numero uguale

$$v \ne 0 \quad \|Av\| = \Big\|A \underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{z} \|v\| \Big\| = 2\text{ proprietà}$$

$$= \|z\|\,\|v\| = \underbrace{\Big\|A\frac{v}{\|v\|}\Big\|}\,\|v\|$$

$$\le \|A\|\cdot\|v\|$$

Condizionamento della Risoluzione di un sistema lineare

$$Ax = b \qquad \hat{A}\hat{x} = \hat{b}$$

Per semplicità di analisi assumiamo che $\hat{A} = A$
e consideriamo la perturbazione solo su b.

$Ax = b \qquad A\hat{x} = \hat{b} \qquad (A \text{ invertibile})$

misurare il condizionamento significa misurare quanto

x e $\hat{x}$ sono vicini.

$$\epsilon_m = \frac{\| x - \hat{x} \|}{\| \cancel{x} \|}$$

$$\| x - \hat{x} \| = \| A^{-1} b - A^{-1} \hat{b} \|$$

$\hat{b} = b + f \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \to \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} b_1(1+\epsilon_1) \\ b_2(1+\epsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \epsilon_1 \\ b_2 \epsilon_2 \end{bmatrix}}_{f}$$

$$= \| A^{-1} b - A^{-1}(b + f) \| = \| -A^{-1} f \| = \| A^{-1} f \|$$

$$\leq \| A^{-1} \| \, \| f \| \qquad |-1| \, \| A^{-1} f \|$$

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|f\|$$

$\|x\|$ sta a denominatore → maggiorazione: a denominatore una quantità più piccola.

$$Ax = b \Rightarrow \|Ax\| = \|b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$C_m = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|f\|}{\dfrac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|f\|}{\|b\|}$$

$$E_m = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|}$$

perturbazione relativa sul termine noto

Coefficiente di amplificazione $\|A\| \, \|A^{-1}\|$

se $\|A\|\|A^{-1}\|$ grande il sistema è mal condizionato

se $\|A\|\|A^{-1}\|$ è piccolo il sistema è ben condizionato

Oss: $\underbrace{\|AA^{-1}\|}_{} = \|I\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

$$\|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$$ (coefficiente amplificazione)

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$ $(\epsilon > 0)$

$\epsilon = 2$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

numero di condizionamento in funzione della norma considerata

$\|A\|_\infty = 2$ $\|A^{-1}\|_\infty = ?$

$A^{-1} \cdot A = I$ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \\ z - w = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} \quad w = \frac{1}{2}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_\infty = 1 \qquad K_\infty(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = 2$

problema ben condizionato

$\varepsilon \to 0^+$ Come diminuisce il problema è perturbato

il condizionamento va a ∞