lezione 20/03

Autovalori ed autovettori di matrici.

Def: $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se $\underline{\underline{\exists x \neq 0}}$ t.c.

$$Ax = \lambda x$$

x è detto autovettore (destro) relativo all'autovalore λ

$$Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \iff (A - \lambda I)x = 0$$

Def: $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomio caratteristico di A

Def: $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $A \iff p(\lambda) = 0$ con
$p(z) = \det(A - zI)$ polinomio caratteristico di A

Esempio $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

autovalori di A $\quad \det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = (-\lambda)(-\lambda) - (1)(-1)$$

$$= \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = i \\ \lambda = -i \end{matrix}$$ (i unità immaginaria)

$$Ax = ix \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = i x_1 \\ -x_1 = i x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = i x_1 \\ -x_1 = i\, i\, x_1 = -x_1 \end{cases}$$

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ i x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad (x_1 \neq 0)$$

Oss: l'autovettore non è univocamente determinato ma è determinato a meno di una costante moltiplicativa

---

gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico

$$p(z) = \det(A - zI)$$ polinomio di grado $\underline{\underline{n}}$

$$p(z) = (-1)^n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_0$$

$p(z)$ su $\mathbb{C}$ ha n zeri $z_1 \dots z_n$

(Teorema fondamentale dell'algebra)

$$p(z) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)$$

$$= (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (z - \lambda_i)^{\sigma_i}$$

($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$ e tutti gli altri uguali a questi)

σ_i è detto <u>molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i</u>

(σ_i = le volte che l'autovalore si ripete)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad p(z) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 1 & 1 \\ 0 & 1-z & 2 \\ 0 & 0 & 2-z \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-z & 1 & 1 \\ 0 & 1-z & 2 \\ 0 & 0 & 2-z \end{pmatrix} = (1-z)\cdot(1-z)\cdot(2-z)$$

$$= (-1)^3 (z-1)\cdot(z-1)(z-2)$$

$$= (-1)^3 (z-1)^2 \cdot (z-2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

lo autovalori: $\lambda_1 = 1$ $\quad \sigma_1 = 2$

$\lambda_2 = 2$ $\quad \underline{\sigma_2 = 1}$

$3 = n$

Se λ è autovalore di A allora $(A - \lambda I)$ è singolare

$\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \geq 1$

$$\tau_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$$

molteplicità <u>geometrica dell'autovalore</u> λ_i

Teorema: $\sigma_i \geq \tau_i$

(molteplicità algebrica $\geq$ molteplicità geometrica)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad \sigma_1 = 2$ $\quad \tau_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$ $\quad \sigma_2 = 1$ $\quad \tau_2 = 1$

$$\ker(\underbrace{A - 1\cdot I}_{=B}) = \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\dim \ker \cancel{B} + \dim \underset{\underset{2}{\parallel}}{\operatorname{Im} \cancel{B}} = n = 3$$

$$\dim \ker \cancel{B} = \dim \ker (A - 1I) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$v = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\dim \ker B = 1}$$

Esempio $A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

autovalori di $A \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

polinomio caratteristico di $A \longrightarrow p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$

$$= (-1)^n \cdot (\lambda - 0)^n \longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \underline{\underline{\sigma_1 = n}}$$

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} - 0 I\right)\right)$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = \underline{1} \qquad \underline{\underline{\tau_1 = 1}}$$

Def: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se $\exists$ $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile t.c.

$$S^{-1} A S = D \ \underline{\underline{\text{diagonale}}}$$

gli <u>autovalori di A sono gli autovalori di D</u>

$$\det(D - \lambda I) = \det(S^{-1} A S - \lambda I)$$

$$=$$

$$= \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) =$$

$$= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S)$$

BINET

$$= \det S^{-1} \det(A - \lambda I) \det S$$

$$\left(\det(S \cdot S^{-1}) = \det S \det S^{-1} = \det(I) = 1\right)$$

$$= \det(A - \lambda I)$$

Quando è che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è diagonalizzabile

Teorema: A è diagonalizzabile $\iff \sigma_i = \tau_i \quad i = 1, \dots, k$

Esempi di matrici diagonalizzabili:

1. $\underline{\underline{k = n}}$ matrice ha tutti autovalori distinti

$$\sigma_i = \tau_i = 1 \quad i = 1 \dots n$$

2. (Teorema spettrale) A è diagonalizzabile se $A = A^T$

(A simmetrica) $\to$ λ autovalori reali

Es = $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

diagonalizzabile ? Sì simmetrica

autovalori $p(z) = z^2 - 1 = 0 \iff z = \pm 1$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$

$\sigma_1 = \tau_1 = 1 \qquad \sigma_2 = \tau_2 = 1$

Calcolo di S

$$S^{-1} A S = D$$

$$\iff A S = S D$$

$$\iff A S e_j = S D e_j \qquad j = 1 \dots n$$

$$\iff A S_j = S d_j e_j = d_j S e_j = d_j S_j$$

le colonne di S sono gli autovettori di A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ autovettore relativo

$$\lambda = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -x_2$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ autovettore relativo a -1

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{S} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE È IN GENERALE UN PROBLEMA DIFFICILE

PERCHÉ GLI AUTOVALORI NON SONO FUNZIONI RAZIONALI DEI COEFFICIENTI DELLA MATRICE (NON ESISTE ALGORITMO CHE ESEGUE NUMERO FINITO DI OPERAZIONI RAZ.)

- SI UTILIZZANO METODI ITERATIVI CHE COSTRUISCONO SUCCESSIONI CONVERGENTI AGLI AUTOVALORI

PER LA CONVERGENZA DI QUESTE SUCCESSIONI È IMPORTANTE AVERE TEOREMI DI LOCALIZZAZIONE CHE MI DICONO DOVE STANNO GLI AUTOVALORI NEL PIANO COMPLESSO

Teorema di Gerschgorin

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e siano K_i gli insiemi definiti da

$$\text{(cerchi)} \quad K_i = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |\underbrace{z - a_{ii}}_{\text{centro}}| \le \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}_{\text{raggio}} \Big\} \qquad i=1\dots n$$

Allora se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A $\Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Esempio

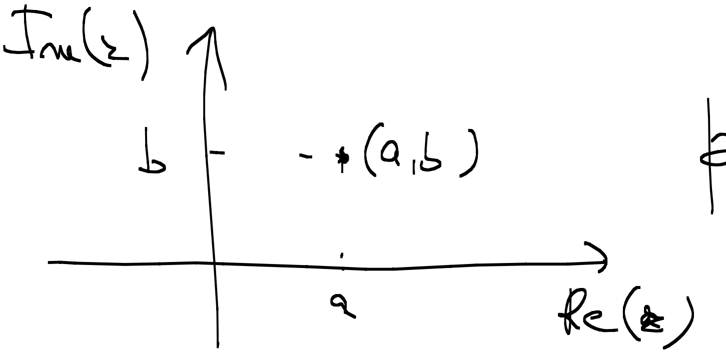
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \le 1 \}$$

$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 2 \}$

$K_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1 \} = K_1$

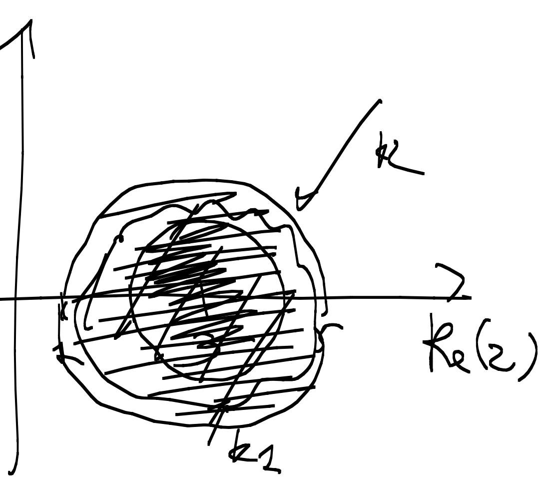
$\mathbb{C} \ni z = \underline{a + ib} \rightsquigarrow (a,b)$



piano di Gauss

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1 \}$

$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 2 \}$

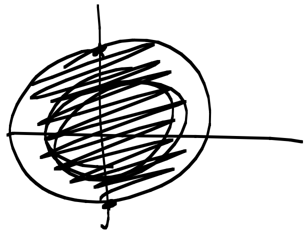


$A = \bar{A} \Rightarrow$ [illegible] sono [illegible]

quindi:

$$\boxed{1 \leq \alpha \leq r}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad K_1 = K_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 0| \leq 1 \}$



Dim:

λ autovalore di A se $\exists\, x \neq 0$ tc $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda x \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad i = 1 \dots n$$

$$\iff \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i \quad i = 1 \dots n$$

$x \neq 0$ quindi $\exists$ almeno 1 componente $\neq 0$

prendiamo quella di modulo massimo $\underbrace{|x_p| = \|x\|_\infty}_{\neq 0}$

$$Ax = \lambda x \implies \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j = (\lambda - a_{pp}) x_p$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} a_{pj}\, x_j\right| = \left|(\lambda - a_{pp})\, x_p\right|$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{pp}|\,|x_p| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} |a_{pj}|\,|x_j|$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{pp}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} |a_{pj}| \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_p|}}_{\le 1}$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{pp}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} |a_{pj}|$$

$$K_p = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{pp}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{m} |a_{pj}| \right\}$$

$$\lambda \in K_p$$

Non conosco p $\Rightarrow$ $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{m} K_i$

Abbiamo considerato i cerchi per riga

Consideriamo i cerchi per colonna.

$\boxed{\text{gli autovalori di } A \text{ sono gli autovalori di } A^T}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left((A-\lambda I)^T\right) = \det(A^T - \lambda I)$$

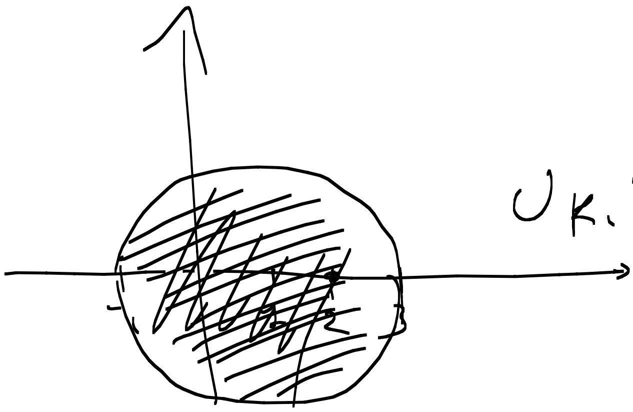
Applico il Teorema di Gershgorin per righe ad A^T

λ autovalore di A $\Rightarrow$ $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{m} H_i$

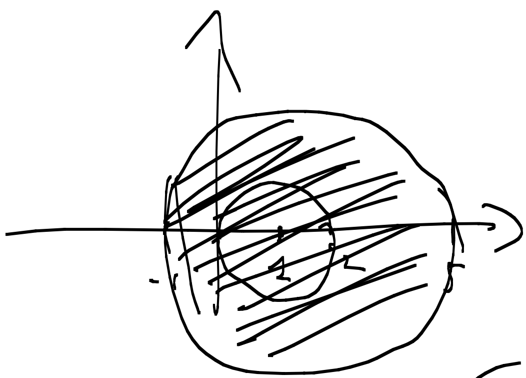
$$H_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} |a_{ji}| \right\}$$

λ autoval di $A \Rightarrow \lambda \in \left(\bigcup K_i\right) \cap \left(\bigcup H_i\right)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$\bigcup K_i$



$\bigcup H_i$

$$\lambda \in \left(\bigcup H_i\right) \cap \left(\bigcup K_i\right)$$