Lezione 27/03

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

PROBLEMA: Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

determinare $x \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$

ASSUNZIONE: A sia invertibile

A matrice dei coefficienti, b termine noto

x vettore delle incognite

x è univocamente determinato $x = A^{-1} b$

(RAPPRESENTAZIONE TEORICA)

LA DIFFICOLTÀ DIPENDE DALLA STRUTTURA DI A

ALCUNI CASI PIÙ SEMPLICI

- A matrice diagonale

$$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

A è invertibile $\iff d_j \neq 0 \quad j = 1 \dots n$

$$\left(\det A = \prod_{i=1}^{n} d_i \right)$$

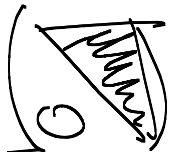
$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} d_1 x_1 = b_1 \\ \vdots \\ d_n x_n = b_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_1 / d_1 \\ \vdots \\ x_n = b_n / d_n \end{cases}$$

for $k = 1 : n$

$\quad x(k) = b(k)/a(k,k)$; $\quad O(n)$ ops

end

A triangolare $\quad A =$  $\quad A =$ 

A triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per $i > j$

A triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ per $j > i$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ triangolare superiore

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ triangolare inferiore

A è invertibile $\Leftrightarrow$ gli elementi diagonali sono $\neq 0$

$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\det A \neq 0 \iff a_{ii} \neq 0$ $i=1,\dots,n$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ triangolare inferiore

$\det A = 1 \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \det(2) = 2$

RISOLVIAMO UN SISTEMA TRIANGOLARE

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ $(a_{ij} = 0 \text{ se } i > j)$

$Ax = b \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2j} x_j = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$

BACKWARD SUBSTITUTION
(SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO)

$$\sum_{j=k}^{n} a_{kj} x_j = b_k$$

Conoscendo $x_{k+1} \dots x_n \longrightarrow x_k$

$$a_{kk} x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j \right)$$

$k = n:-1:1$

```
x(n) = b(n) / a(n,n)
for k = n-1 : -1 : 1
    s = 0
    for j = k+1 : n
        s = s + a(k,j) * x(j)
    end
    x(k) = ( b(k) - s ) / a(k,k);
end
```

Costo computazionale (costo moltiplicazioni)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \Theta(n)$$

$O(n^2)$ ops

Triangolari inferiori $A = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ \text{≠0} & \end{pmatrix}$

$(a_{ij} = 0 \text{ se } j > i)$

$$Ax = b \iff \begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = b_n \end{cases}$$

FORWARD SUBSTITUTION

(SOSTITUZIONE IN AVANTI)

A generale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

IDEA: CERCARE DI RIPORRE A IN UNA FORMA PIÙ SEMPLICE MANTENENDO L'EQUIVALENZA DEI SISTEMI LINEARI

$$Ax = b \longrightarrow Fx = g$$

- I sistemi sono equivalenti
- F è più semplice di A (ad esempio F è triangolare)

COMINCIAMO A DOMANDARCI SE A PUÒ ESSERE SCRITTA COME PRODOTTO DI MATRICI TRIANGOLARI

$$A = L \cdot U \qquad L \; U \text{ triangolari}$$

$$Ax = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

$$\iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice fattorizzabile LU o in forma LU se $\exists\, L$ matrice triangolare inferiore con elementi $= 1$ sulla diagonale principale e U triangolare superiore t.c. $\underline{A = L \cdot U}$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = u_1 \\ 1 = u_3 \\ 1 = l\, u_1 \\ 0 = l\, u_3 + u_2 \end{cases}$$

NON CI SONO SOLUZIONI

A non ammette <u>fattorizzazione LU</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = u_1 \\ 0 = u_2 \\ 1 = \ell u_1 \\ 0 = \ell u_2 + u_3 \end{cases}$$

NON AMMETTE FATTORIZZAZIONE LU

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_3 = 1 \\ \ell u_1 = 0 \\ \ell u_3 + u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_3 = 1 \\ 0 = 0 \\ \ell + u_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_2 = -\ell$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\ell \end{bmatrix}$$

Esistono infinite fattorizzazioni LU

$$(l \in \mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = u_1 \\ 1 = u_3 \\ 1 = l u_1 \Rightarrow l = 1 \\ 1 = l u_3 + u_2 \Rightarrow u_2 = 0 \end{cases}$$

Fattorizzazione LU esiste unica

Teorema: (esistenza ed unicità della fattorizzazione LU)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e siano $A_k = A(1:k, 1:k)$ $k = 1 \ldots n$ le sottomatrici principali di testa.

Se $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sono invertibili $\Rightarrow \exists!$ LU di A

Dim: Per induzione sulla dimensione della matrice

$n = 1 \quad A = [a]$

$a = 1 \cdot a$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & z \\ \hline v^T & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1} \\ z = L_{n-1}\, y \iff y = L_{n-1}^{-1} z \\ v^T = x^T U_{n-1} \implies x^T = v^T U_{n-1}^{-1} \\ \alpha = x^T y + \beta \end{cases}$$

A_{n-1} è una matrice di ordine $n-1$
le sue sottomatrici principali di testa dall'ordine $1 \cdots n-2$
sono quelle di A e quindi per l'ipotesi del teorema
invertibili $\implies$ per ipotesi induttiva $\exists!$ fattorizz

LU di A_{n-1}

per ipotesi del Teorema A_{n-1} invertibile

$$0 \neq \det(A_{n-1}) = \det(L_{n-1}U_{n-1})$$

$$\overset{\text{Binet}}{=} \det(L_{n-1})\det(U_{n-1}) = \det(U_{n-1})$$

. . . . . Converso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ y_1 & \cdots & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

(freccia $\searrow$)

arrow matrix

arrowhead matrix

1. Dire se $\exists$ la fattorizzazione LU di A
2. Dire se la fattorizzazione è unica
3. Trova algoritmo determinato.

$A_1 = [1]$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_j = I$, dimostra τ $j=1 \dots n-1$

$\det A_j = \det I = 1$

$\Rightarrow \exists !\ LU$ di A

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline x_1 \dots x_{n-1} & x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x_1 \dots x_{n-1} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$$

$I_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1} = I_{n-1} I_{n-1}$

$I_{n-1}\, y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ $\qquad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \beta = x_n$$

$$\beta = x_n - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

Per quali valori di $x_1 \dots x_n$ A è singolare.

$$\det A = \underbrace{\det(L)}_{=1} (\det U) = \det U$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline & \beta \end{array} \right) = \beta$$

$$\det A = \beta = x_n - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

A è singolare $\iff$ $\boxed{\underline{x_n = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}$

<u>MATLAB</u> <u>Det(A)</u> <u>$A = LU$</u>

$$\det A = \underline{\det U} = \prod_{j=1}^{n} u(j,j)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

① Dire se A ammette fattorizzazione $\underline{LU}$?

$$A_k = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k} \qquad k = 1 \dots n-1$$

A_k è invertibile per il Teorema di Gerschgorin

$0 \notin \bigcup K_i \Rightarrow A_k$ è invertibile

$\Rightarrow$ A ammette fattorizzazioni $\underline{LU}$

Esercizio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1) Dire se A ammette fattorizzazione LU
2) Nel caso affermativo calcolarla.
3) Determinare il $\det(A)$