Esercitazione 03/04

$$A = \begin{bmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (a \in \mathbb{R})$$

(1) Dire per quali valori di a · A ammette fattorizzazione LU

$$A_k = \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k} \qquad k=1,\dots,n-1$$

$$\det A_k = a^k \neq 0 \iff a \neq 0$$

A_k $(k=1:n-1)$ è invertibile $\iff a \neq 0$

$\underline{a \neq 0} \implies \exists$ fattorizzazione LU di A

per il Teorema di esistenza ed unicità.

$\underline{a=0}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

Se $\exists$ $u(1,1) = 0 \Rightarrow$ la 1° colonna di U è nulla. Assurdo perché ultima riga di $L \cdot$ 1° colonna di U dovrebbe far 1

$\Rightarrow$ $a = 0$ non esiste fattorizz. LU di A, $n \geq 2$

$\Rightarrow$ ($a = 0$ $\underline{n = 1}$ $\exists$ fatt. LU di A)

$a \neq 0$ $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{pmatrix}$$

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix} = I_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline \frac{1}{a}\ 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0^T & a - \frac{1}{a} \end{array}\right)$$

$$I_{n-1} \cdot Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 a = 1 \\ x_2 a = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1/a \\ x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

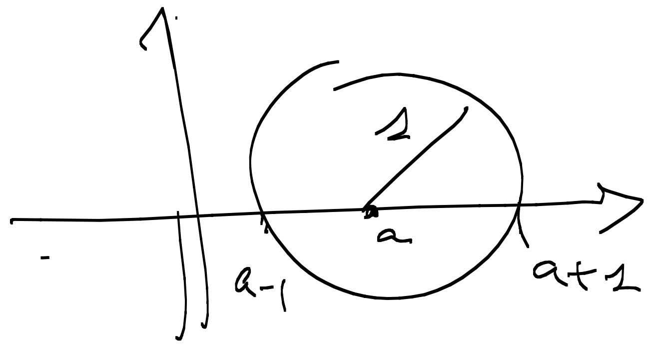
$$\frac{1}{a} + \beta = a$$

$$\beta = a - \frac{1}{a}$$

③ Si mostri che A è invertibile per $|a|>1$

Gerschgorin:

$a > 0$



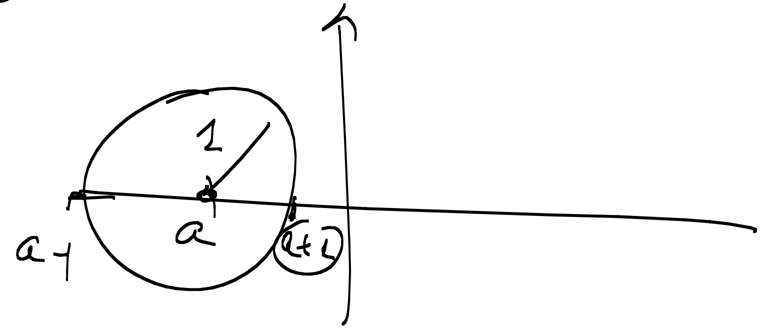
$K_1 = K_n = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| \le 1 \}$

$K_2 = \dots = K_{n-1} = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| = 0 \}$

$\underline{a > 1} \iff a-1 > 0$ e quindi $0 \notin \bigcup K_i$

$\Rightarrow A$ è invertibile.

$a < 0$



$a < -1 \iff \underline{a+1 < 0} \Rightarrow 0 \notin \bigcup K_i$

$\Rightarrow A$ è invertibile

④ Det A ? (Laplace)

LU

Binet

$$A = LU \Rightarrow \det A = \det L \cdot \det U$$

$$\det L = 1$$

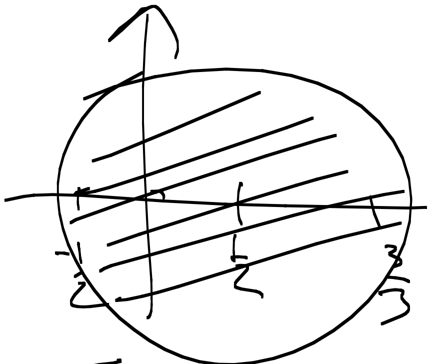
$$\det U = \prod_{k=1}^{n} u(k,k) = a^{n-1}\left(a - \frac{1}{a}\right) =$$

$$= a^{n} - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1) =$$

A è singolare $\Leftrightarrow$ U è singolare

$\Leftrightarrow$ $a = 0$ o $a = \pm 1$

$a = \frac{1}{2}$



~~$0 \in \bigcup K_i \Rightarrow$ A è singolare~~

f continua $\Rightarrow f \in U k_i$

$$A \Rightarrow B$$

$$\sim B \Rightarrow \sim A$$

$$f(a) = a^n - a^{n-2}$$

$$C_a = \frac{f'(a)}{f(a)}\, a$$

$$|E_m| \doteq |C_a| \cdot |E_a| \leq |C_a|\, u$$

$$C_a = \frac{n a^{n-1} - (n-2)\, a^{n-3}}{a^n - a^{n-2}} \cdot a$$

$$C_a = \frac{\cancel{a^{n-2}} \cdot \left(n \cdot a^2 - (n-2) \right)}{\cancel{a^{n-2}} \cdot (a^2 - 1)}$$

$$C_a = \frac{n\,a^2 - (n-2)}{a^2 - 1}$$

Mal condizionato: $a^2 \approx 1$

Caso poss. che quando $|a| \to +\infty$

$|a| \to +\infty \quad a^2 \to +\infty$

$$\lim_{|a| \to +\infty} C_a = \lim_{|a| \to +\infty} \frac{\cancel{a^2}\left(n - \frac{n-2}{a^2}\right)}{\cancel{a^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}$$

$$= \underline{n}$$

Ben condizionato per $|a|$ grande

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori: $\det(A-\lambda I)$

$Ax = \lambda x$ ⊄

ⓐ $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a-\lambda \end{pmatrix}$

$= (-1)^4 (a-\lambda) \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & \\ & \ddots & \\ 1 & & a-\lambda \end{pmatrix}$

$= (a-\lambda)^{n-2} \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$

$= (a-\lambda)^{n-2} \cdot \left((a-\lambda)^2 - 1\right)$

λ autovalore di A $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow (a-\lambda)^{n-2} \cdot \left((a-\lambda)^2 - 1\right) = 0$

$$\iff (a-\delta)^{n-2} = 0 \quad o \quad (a-\delta)^2 - 1 = 0$$

$$\iff \delta = a \quad o \quad a-\delta = \pm 1$$

$$\iff \delta = a \quad o \quad \delta = a \pm 1$$

$$\delta = a \qquad \delta = a-1 \qquad \delta = a+1$$

$$T = \sigma = \underline{n-2} \quad T = \sigma = 1 \qquad T = \sigma = 1$$

A $\underline{\text{è diagonalizzabile}}$? Sì PER IL TEOREMA SPETTRALE

$A = A^T$ $\underline{\text{simmetrica}}$

$$Ax = \delta x \qquad \iff \qquad \begin{cases} a x_1 + x_n = \delta x_1 \\ a x_j = \delta x_j \quad j = 2 \cdots n-1 \\ x_1 + a x_n = \delta x_n \end{cases}$$

$x \neq 0$

se $\exists j$ con $2 \le j \le n-1$ t.c. $x_j \ne 0$

$$a x_j = \delta x_j \iff (a-\delta) x_j = 0$$
$$\iff a - \delta = 0 \iff a = \delta$$

$$\underline{Ax = b} \iff \begin{cases} a x_1 + x_n = b_1 \\ a x_j = b_j \quad j = 2 \dots n-1 \\ a x_n + x_1 = b_n \end{cases}$$

$$A x = b \qquad A = LU$$

$$\underbrace{LUx}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$L = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \\ \hline \frac{1}{a}\; 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \qquad U = \left[\begin{array}{ccc|c} a & & & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & a & 0 \\ \hline & & & a - \frac{1}{a} \end{array}\right]$$

$Ly = b$

$$\iff \begin{cases} y(k) = b(k) & k = 1 \dots n-1 \\ y(n) = b(n) - \dfrac{b(1)}{a} \end{cases}$$

$$Ux = y \iff \begin{cases} x(n) = y(n) / (a - \frac{1}{a}) \, ; \\ x(k) = y(k)/a \, ; \quad k = n-1:-1:2 \\ a\, x(1) + x(n) = y(1) \end{cases}$$

$$x_1 = (y(1) - x(n))/a$$

$O(n)$ operazioni moltiplicative $n + O(1)$
$O(n)$ operazioni additive n operazioni

Calcolo del numero di condizionamento di A.

Posto $\underline{a \neq 0}$ e $a \neq \pm 1$

(A invertibile)

$\| \ \|_\infty$

$$\|A\|_\infty = \underline{|a|+1}$$

$\|A^{-1}\|$?

$$Ax = e_j \qquad j=1 \dots n$$

$j = 2 \dots n-1$

$$Ax = e_j \iff \begin{cases} a x_1 + x_n = 0 \\ a x_k = 1 \quad k = j \\ \qquad\; 0 \quad \text{altri} \\ a x_n + x_1 = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-esima posizione}$$

$$\underbrace{Ax = e_1}_{?} \qquad \underbrace{Ax = e_n}_{} \qquad A^{-1}$$

$$\underline{A = LU} \implies A^{-1} = (LU)^{-1}$$

$$(LU)^{-1} \cdot L \cdot U = I$$

$$\|$$

$$\underbrace{U^{-1} \underbrace{L^{-1} \, L}_{I} \, U}_{I} = I$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \tilde{\ell} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & u_3 \\ 0 & \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

CALCOLO SIMBOLICO