# Lezione 08/04

CALCOLO DELLA FATTORIZZAZIONE LU di A

STRUMENTO: <u>MATRICI ELEMENTARI di GAUSS</u>

DEF: Sia $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $E$ si dice elementare di Gauss se $\exists\, k$ con $1 \le k \le n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$ tale che

$$E = I - v e_k^T = I - \big[\ \big]\big[\ \ \big]$$

Esempio $n = 4$

$$k = 1 \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -v_2 & 1 & & \\ -v_3 & & 1 & \\ -v_4 & & & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -v_3 & 1 & \\ & -v_4 & & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=3 \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -v_4 & 1 \end{bmatrix}$

$k=4 \qquad E = I$

Matrici elementari di Gauss = matrici triangolari inferiori con elementi diagonali = 1

ed altri elementi non nulli in 1 colonna sotto l'elemento diagonale.

Proprietà

① $E = I - v e_k^T$ è invertibile e

$E^{-1} = I + v e_k^T$ (e ancora elementari di Gauss)

Dim $(I - v e_k^T)(I + v e_k^T) =$

$$I + \cancel{v e_k^T} - \cancel{v e_k^T} - v \underbrace{(e_k^T v)}_{=0} e_k^T$$

$$= I$$

② Dato $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \neq 0$ $\exists$ $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elementare di Gauss tale che

$$E x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dim: Cerchiamo $E = I - v e_k^T$

Dobbiamo determinare $v$. Vediamo che

$$(I - v e_k^T) x = x - v (e_k^T x)$$

$$= x - v x_k$$

Imponiamo che $x - v x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \quad v x_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftarrow$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0}$ e

$v_j x_k = x_j \quad j = k+1 : n$

$$v_j = \frac{x_j}{x_k} \quad j = k+1 \cdots n \quad \boxed{\text{S}}$$

③ Il prodotto $Ex$ con $E$ matrice elementare di Gauss costa $O(n)$ ops

$E = I - v e_k^T$

$Ex = (I - v e_k^T) x = x - v x_k$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} - x_k \cdot v_{k+1} \\ \vdots \\ x_n - x_k v_n \end{bmatrix}$$

$n-k$ operazioni moltiplicative

$n-k$ operazioni additive

# CALCOLO FATTORIZZAZIONE LU

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

I° passo.

Supponiamo che $\underline{a_{11}^{(0)} \neq 0}$ $\Rightarrow$

$$E_1 = I - v e_1^T \quad \text{t.c.} \quad E_1 \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_j = \frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad j = 2 \ldots n$$

(moltiplicatori di Gauss)

Calcolo $A^{(1)} = E_1 A^{(0)}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -v_2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -v_n & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{1i}^{(0)} = a_{1i}^{(1)} \qquad i = 1 \ldots n$$

(la I° riga non è modificata) :

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} -v_i & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{nj}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= a_{ij}^{(0)} - v_i \, a_{1j}^{(0)}$$

$$= a_{ij}^{(0)} - \left( \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \right) a_{1j}^{(0)}$$

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \left( \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \right) * a_{1j}^{(0)} \qquad i = 2:n \, , \; j = 2:n}$$

Costo
(a) calcolo i moltiplicatori $O(n)$ ops
(b) aggiornamento di $A^{(1)}$ $O(n^2)$ ops
$(n-1)^2$ op. moltipl. ...

II° step andiamo a mettere elementi nulli nella seconda colonna

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Supponiamo che $a_{22}^{(1)} \neq 0$ $\left( a_{kk}^{(k-1)} \ \underline{\underline{\text{pivot}}} \right)$

Posso determinare $E_2$ t.c.

$$\underline{\underline{E_2}} \begin{bmatrix} a_{12}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = I - \underline{\underline{v}} e_2^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -v_3 & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -v_n & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_j = \frac{a_{j2}}{a_{22}^{(1)}}} \qquad j = 3 \cdots n$$

$$A^{(2)} = E_2 \cdot A^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & & & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & \cdots \\ | & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ | & | & | & & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

---

In conclusione

Se $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad k=1 \ldots n-1$

Posso determinare $E_1 \ldots E_{n-1}$

matrici elementari di Gauss tale che

$$E_{n-1} \cdots E_1 A^{(0)} = A^{(n-1)} = \underline{\underline{U}}$$

Matrice triangolare superiore

$$E_{n-1} \cdots E_1 A = U$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\left(E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}\right)}_{L} \cdot U$$

$$A = L U$$ fattorizzazione LU di A

Esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

A ammette fattorizzazione LU (teorema di esistenza e unicità)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A^{(1)}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = U$$

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1}}_{L} U$$

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

L è fatta dai moltiplicatori colonna x colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

LU di A

Ipotesi di lavoro $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

Ipotesi per $\exists$ ed unicità $\det \underline{\underline{A_k}} \neq 0 \quad k = 1 \ldots n-1$

$= \quad$ Se $\det A_k \neq 0 \quad k = 1 \ldots n-1$

$$\Rightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

$A_1 = \left[ a_{11}^{(0)} \right] \qquad \det A_1 \neq 0 \iff a_{11}^{(0)} \neq 0$

$\Rightarrow$ Quindi posso fare il I° passo

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \text{---} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \quad \text{---} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} \quad \text{---} \end{bmatrix} = E_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Per le sottomatrici principali di testa di ordine 2

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Binet $\boxed{a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} = \det A_2}$

Se $\det A_2 \neq 0 \Rightarrow a_{22}^{(1)} \neq 0 \Rightarrow$ [illegible] secondo pivot . . . .

---

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$Ax = b$ (A invertibile)

$A = LU \quad O(n^3)$

$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$O(n^2)$

Posso anche applicare direttamente le matrici elementari ad $A$ e $b$

$$Ax = b \qquad A^{(0)}x = b^{(0)}$$

$$E_{n-1} \cdots E_1 A^{(0)} x = E_{n-1} \cdots E_1 b^{(0)}$$

I° step determino $E_1$

$$E_1 A^{(0)} x = E_1 b^{(0)}$$

<u>Sistema equivalente</u>

$$A^{(1)} x = b^{(1)}$$

$$E_2 A^{(1)} x = E_2 b^{(1)}$$

$$A^{(2)} x = b^{(2)} \ldots$$

$$\cdots \quad Ux = b^{(n-1)}$$

Metodo di eliminazione gaussiana per risolvere il sistema lineare $Ax = b$

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 0x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

---

Esercizio:

$A = (a_{ij})$

$a_{ij} = \min(i, j)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ & 2 & \cdots & & 2 \\ & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{pmatrix}$$

① Provo se A ammette fattorizzazione LU ed in caso effettuo la decomposizione.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & 2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & & \end{bmatrix}$$

1° passo $E_{12}$
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ -1 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \end{bmatrix}$$

La matrice a cui devo applicare il metodo per calcolare LU è la stessa del passo precedente con dimensione diminuita di 1

$$I_c = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ -1 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

..... il processo è applicabile $\Rightarrow \exists\, LU$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & 1 & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

---

**Esercizio** $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

1. Dire se A ammette fattorizzazione LU
2. In caso affermativo calcolarla e anzi trovarne almeno 2 differenti.

$\det A_1 \neq 0 \qquad \det A_2 = \det A_3 = \cdots = \det A_n$
$= 0$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ - & \ddots & \\ \vdots & & \\ - & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = U$$

triangolare superiore

$$A = E_1^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

[illegible]: $L\,U$

Triangolari superiori $a_{ij} = 0$ se $i > j$

Calcolo di autovalori di $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A = LU$ $\det A = \det U$

$A$ è singolare $\Leftrightarrow$ $U$ è singolare

$A$ ha un autovalore nullo $\Leftrightarrow$ $U$ ha un autovalore nullo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ ha un autovalore nullo

$$\underline{Ax = 0} \Leftrightarrow LUx = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ux = 0$$

$\Leftarrow)\quad \underline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0}$

posso scegliere $n-1$ componenti liberamente e poi determinare l'ultima di conseguenza e quindi $\underline{\dim \ker A = n-1}$

Alternativa:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{1} + \dim \ker A = n$$

$$= 1$$

$$\dim \ker A = n-1$$

0 è autovalore di A con $\underline{\underline{\sigma = \tau = n-1}}$

Cerchiamo un autovalore non nullo

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\delta = n$ $\qquad$ $\sigma = \tau = 1$