$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$\exists\, a_{j1}^{(0)} \neq 0$ Prendo j: $|a_{j1}^{(0)}| = \max_{k=1..n} |a_{k1}^{(0)}|$

Scambio riga j con riga 1

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(\frac{1}{2})} = \left(\begin{bmatrix} a_{j1}^{(0)} & \cdots & a_{jn}^{(0)} \\ & & \\ a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & & \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

posizione j

$$A^{(1/2)} = P_1 A^{(0)}$$

P_1 matrice ottenuta dall'identità scambiando colonne 1 e j

P_1 matrice di permutazione (Proprietà: $P^{-1} = P^T$)

$$A^{(1/2)} = P_1 A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = E_1 P_1 A^{(0)}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \text{—} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \text{—} \end{bmatrix}$$

$$\exists\, j \geq 2 \text{ t.c. } a_{j2}^{(1)} \neq 0$$

(altrimenti 1 e 2 sono linearmente dipendenti $\Rightarrow A$ singolare)

Determino $\left|a_{J2}^{(1)}\right| = \max_{k=2 \ldots n} \left|a_{k2}^{(1)}\right|$

Scambio 2 e J-esima riga ....

Se posso dividere:

$$\mathcal{E}_{n-1} P_{n-1} \mathcal{E}_{n-2} \cdots \mathcal{E}_1 P_1 A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = \underbrace{P_1^T \mathcal{E}_1^{-1} \cdots P_{n-1}^T \mathcal{E}_{n-1}^{-1}}_{L} U$$

$$A^{(0)} = L \cdot U$$

L non è triangolare

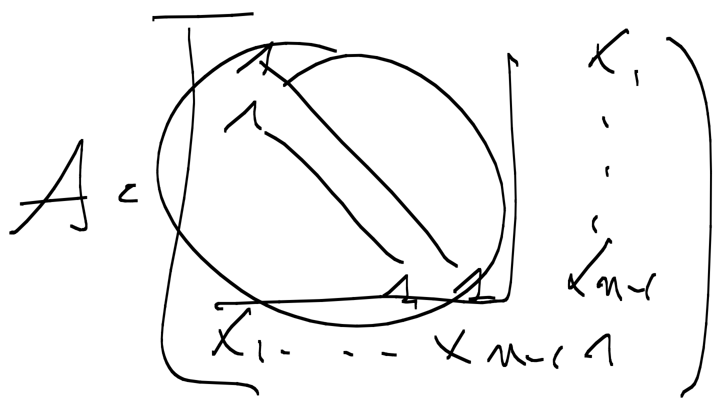
("psicologicamente triangolare" MATLAB)

$[L, U] = lu(A)$ / $x = A \backslash b$

pivoting

(partial pivoting)

1. rende il processo applicabile ad ogni matrice invertibile
2. migliora la stabilità
3. non cambia il costo computazionale
4. può aumentare il fill-in.



L, U sparse

no ai pivoting

U si riempie.

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1+\epsilon & -\epsilon \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = A \backslash b$ Ok

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1+\epsilon)}{\epsilon} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = E \cdot A \qquad x_2 = U \backslash b$$

$$b = E \cdot b$$

NO

Metodi Iterativi

$Ax = b$ A invertibile A sparsa

A sparsa = molti elementi sono nulli

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & x & \cdots & x \\ x & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$nnz(A) << n^2$

$nnz(A) = O(n)$

$O(n \log^p n)$

$O(n \cdot \sqrt{n})$

Metodo di eliminazione gaussiana = metodo diretto
= numero finito di passi otteniamo la soluzione del sistema.

Metodi iterativi: costruiamo una successione
$\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di vettori tali che $x^{(k)} \longrightarrow x$
soluzione del sistema lineare.

Criterio di arresto: quando mi fermo?

$$\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

Def: $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$

$$\iff \lim_{k\to+\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

Qualsiasi norma ok (EQUIVALENZA TOPOLOGICA)

$$\| x^{(k)} - x \|_\infty = \max_{j=1\cdots n} | x_j^{(k)} - x_j | \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

$$| x_j^{(k)} - x_j | \xrightarrow{k \to +\infty} 0 \qquad j = 1 \cdots n$$

$$0 \leq | x_j^{(k)} - x_j | \leq \max_{j=1\cdots n} | x_j^{(k)} - x_j |$$

$Ax = b \qquad A = M - N$

M invertible.

$$Ax = b \iff (M - N)x = b$$

$$\iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\iff x = Px + q$$

$$P = M^{-1} N \qquad \underline{q} = M^{-1} b$$

$$\boxed{Ax = b} \iff \boxed{\begin{array}{c} x = Px + \underline{q} \\ P = M^{-1}N \quad q = M^{-1}b \\ A = M - N \end{array}}$$

$$x = Px + \underline{q} \rightsquigarrow \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \underline{q} \end{cases}$$

Teorema: Se $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \in \mathbb{R}^n$

allora $x = Px + \underline{q}$

(questa è la soluzione del sistema lineare)

Dim: $x^{(k)} \longrightarrow x$ (Ipotesi)

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \quad \text{(Ipotesi)}$$

$$x = \lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} P x^{(k)} + g$$

$$= Px + g$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax = b \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

① $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A = M - N \qquad M$ invertibile

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \cancel{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Successione generata $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

dipende dalla scelta del vettore iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

Ok convergenza.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = (-1)^{(k)} \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$x^{(k)}$ diverge (non converge)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$x^{(k)} \rightarrow 0$ soluzione.

Convergenza in generale dipende da come sono selezionate M e N $(A = M - N)$

Lezione 24/04

$Ax = b \qquad A = M - N \qquad M$ invertibile.

$(M - N)x = b \iff Mx = Nx + b$

$\iff x = \underbrace{M^{-1}N}_{P} x + \underbrace{M^{-1}b}_{q}$

$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}}$

Fissata A la convergenza dipende in generale dalla selezione di M, N (metodo) e velocità migliore.

Analisi della convergenza

Convergenza

Def: Un metodo iterativo $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$ $(k \geq 0)$ per risolvere $Ax = b$ con $P = M^{-1}N$ $q = M^{-1}b$ $A = M - N$, si dice CONVERGENTE se

$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ $\lim x^{(k)} = x$ soluzione del sistema

cioè la successione generata converge alla soluzione del sistema lineare

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$$ metodo iterativo

$$x = Px + q$$ soluzione del sistema

$$x^{(k+1)} - x = P\left(x^{(k)} - x\right)$$

$e^{(k)} = x^{(k)} - x$

$$\boxed{e^{(k+1)} = P e^{(k)} \qquad \underline{k \geq 0}}$$

Teorema: Il metodo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ è convergente se $\exists \; \| \; \|$ norma vettoriale indotta da una norma vettoriale tale che $\|P\| < 1$.

Dim: $e^{(k+1)} = P e^{(k)} \Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = \|P e^{(k)}\|$

$\leq \|P\| \, \|e^{(k)}\| \leq \|P\|^2 \|e^{k-1}\| \leq \dots$

$\leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\| \qquad \underline{0 \leq a < 1}$

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\| \leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|$$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

Teorema dei carabinieri.

Teorema: Se il vettore $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ è convergente allora $\rho(P) < 1$

Dim: Se è convergente la successione converge $\forall x^{(0)}$ e quindi $e^{(k)} \to 0 \quad \forall e^{(0)}$

Prendiamo $e^{(0)} = v$ t.c. $Pv = \lambda v$ con $|\lambda| = \rho(P)$

$$e^{(k+1)} = P e^{(k)} = \dots = P^{k+1} e^{(0)} = P^{k+1} v =$$

$$= \lambda^{k+1} v = \lambda^{k+1} e^{(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \| e^{(k+1)} \| = |\lambda|^{k+1} \underbrace{\| e^{(0)} \|}_{\neq 0}$$

$$\| e^{(k+1)} \| \to 0 \iff |\lambda| < 1$$

$\blacksquare$

Teorema: Se $\rho(P) < 1$ allora il metodo

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \text{ è convergente.}$$

Dim: (solo x matrici diagonalizzabili)

$$P = V D V^{-1}$$

$$P^{k+1} = V D^{k+1} V^{-1}$$

$$\| P^{k+1} \|_\infty \le \| V \|_\infty \| V^{-1} \|_\infty \rho(P)^{k+1}$$

$$0 \leftarrow 0 \le \| e^{(k+1)} \|_\infty \le \| P^{k+1} \|_\infty \| e^{(0)} \|_\infty$$

$$\le \| V \|_\infty \| V^{-1} \|_\infty \rho(P)^{k+1} \| e^{(0)} \|_\infty$$

$$\downarrow 0$$

$\boxed{\Xi}$

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente x la

Convergenza è che $\rho(P) < 1$.

$$X^{(k+1)} = P X^{(k)} + q \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Convergente?

$$\frac{11}{12} = \|P\|_1 = \max\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right\}$$

$$\|P\|_\infty = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} > 1$$

$$\|P\|_\infty > 1 \quad e \quad \|P\|_1 < 1$$

Il metodo è convergente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = M - N$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & & -0 \\ & 0 & \vdots \\ & & -0 \end{bmatrix}$$

è convergente? A valutazioni le proprietà di P

$$P = M^{-1}N = M^{-1}\begin{bmatrix} 0 \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0 \,|\, v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0 \,|\, M^{-1}v \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}v = x \iff Mx = v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ \vdots \\ -0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = -\theta$$

$$\theta x_1 + \theta x_2 + \dots + \theta x_{n-1} + x_n = 0$$

$$x_n = \theta^2 + \theta^2 + \dots + \theta^2$$

$$P = \begin{bmatrix} & & & -\theta \\ & & & \vdots \\ & 0 & & -\theta \\ & & & (n-1)\theta^2 \end{bmatrix}$$

$\varphi(P) = ?$ P è triangolare superiore e quindi i suoi autovalori stanno sulla diagonale principale

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = (n-1)\theta^2$$

$$\varphi(P) = (n-1)\theta^2$$

è convergente $\iff (n-1)\theta^2 < 1$

$$\iff \theta^2 < \frac{1}{n-1}$$

c) $-\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \theta < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

$$\|P\|_\infty = \max\left\{ |\theta|, (n-1)\theta^2 \right\} < 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \theta \\ & \ddots & \vdots \\ \theta & \cdots \ \theta & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} & O & -\theta \\ & & \vdots \\ & & -\theta \\ -\theta & \cdots \ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = P = N = \begin{bmatrix} 0 & & -\theta \\ & & \vdots \\ & & -\theta \\ -\theta & \cdots \ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Cond. [illegible] su θ affinché il metodo sia convergente

$$\|P\|_\infty = \|P\|_1 < 1$$

$$(n-1)|\theta| < 1$$

$$|\theta| < \frac{1}{n-1} \qquad -\frac{1}{n-1} < \theta < \frac{1}{n-1}$$

Conoscere raccordi e molteplicità di $\varphi(P)$?

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \theta \\ \theta & \cdots & \theta & \lambda \end{bmatrix}\right) = ?$$

$\forall \lambda \neq 0$ la matrice ammette fattorizzazione LU

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \theta \\ \theta & \cdots & \theta & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{\theta}{\lambda} & \cdots & \frac{\theta}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & \theta \\ & & & x \end{bmatrix}.$$

$$x + (n-1)\frac{\theta^2}{\lambda} = \lambda \qquad x = \lambda - (n-1)\frac{\theta^2}{\lambda}$$

$$\det(\lambda I - P) = \det U \cdot \det L$$ ~ 1

$$= \lambda^{n-1} \cdot \left[\lambda - \frac{(n-1)\theta^2}{\lambda} \right]$$

$$= \lambda^{n} - (n-1)\theta^2 \lambda^{n-2}$$

$$= \lambda^{n-2} \cdot \left(\lambda^2 - (n-1)\theta^2 \right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{n-1} \cdot \theta$

$$\varphi_1(P) = \sqrt{n-1}\,|\theta| < 1$$

$$\iff |\theta| < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$