Metodi Iterativi

$Ax = b$ $\quad$ A invertibile $\quad$ A sparsa

A sparsa = molti elementi sono nulli

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & x & \cdots & x \\ x & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x & & & \ddots_{n} \end{bmatrix}$$

$nnz(A) << n^2$

$nnz(A) = O(n)$

$O(n \log^p n)$

$O(n \cdot \sqrt{n})$

Metodo di eliminazione gaussiana = metodo diretto
= numero finito di passi otteniamo la soluzione del sistema.

Metodi iterativi: costruiamo una successione

$\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}}$ di vettori tali che $x^{(k)} \longrightarrow x$

soluzione del sistema lineare.

Criterio di arresto: Quando mi devo fermare.

$$\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}} \qquad x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

Def: $\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}}$ $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

Qualsiasi norma ok (EQUIVALENZA TOPOLOGICA)

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty = \max_{j=1\cdots n} |x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

$$|x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \qquad j=1\cdots n$$

$$0 \le |x_j^{(k)} - x_j| \le \max_{j=1\cdots n} |x_j^{(k)} - x_j|$$

$Ax = b \qquad A = M - N$

M inversibile.

$$Ax = b \iff (M-N)x = b$$

$$\iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\iff x = Px + q$$

$$P = M^{-1} N \qquad \underline{q} = M^{-1} b$$

$$\boxed{Ax = b} \iff \boxed{\begin{array}{c} x = Px + \underline{q} \\ P = M^{-1}N \quad q = M^{-1}b \\ A = M - N \end{array}}$$

$$x = Px + \underline{q} \rightsquigarrow \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \underline{q} \end{cases}$$

Teorema: se $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \in \mathbb{R}^n$

allora $x = Px + \underline{q}$

(quindi è la soluzione del sistema lineare)

Dim: $x^{(k)} \longrightarrow x$ (Ipotesi)

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \quad \text{(Ipotesi)}$$

$$x = \lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} P x^{(k)} + g$$
$$= Px + g$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax = b \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1 $\quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A = M - N \qquad M$ invertibile

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \cancel{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Successione generata $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

dipende dalla scelta del vettore iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

OK convergenza.

$$\begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{bmatrix} = (-1)^{(k)} \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$X^{(k)}$ diverge (non converge)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)}.$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$x^{(k)} \to 0$ soluzione.

Convergenza in generale dipende da come sono selezionati M e N

$(A = M - N)$

Lezione 27/04

$Ax = b \qquad A = M - N \qquad M$ invertibile.

$(M-N)x = b \iff Mx = Nx + b$

$\iff x = \underbrace{M^{-1}N}_{P} x + \underbrace{M^{-1}b}_{q}$

$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}}$

Fissata A la convergenza dipende in generale dalla selezione di M, N (metodo)

$\Rightarrow$ velocità migliore.

Analisi della convergenza

Convergenza

Def: Un metodo iterativo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ $(k \geq 0)$ per risolvere $Ax = b$ con $P = M^{-1}N$ $q = M^{-1}b$ $A = M - N$, si dice **CONVERGENTE** se

$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ $\lim x^{(k)} = x$ soluzione del sistema

cioè la successione generata converge alla soluzione del sistema lineare

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \quad \text{metodo iterativo}$$

$$x = P x + q \quad \text{soluzione del sistema}$$

$$x^{(k+1)} - x = P\left(x^{(k)} - x\right) \qquad k \geq 0$$

$e^{(k)} = x^{(k)} - x \qquad k \geq 0$

$$\boxed{e^{(k+1)} = P e^{(k)} \qquad \underline{k \geq 0}}$$

Teorema: Il metodo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ è convergente se $\exists \; \| \; \|$ norma vett. e matricial

una norma indotta tale che $\| P \| < 1$.

Dim: $e^{(k+1)} = P e^{(k)} \Rightarrow \| e^{(k+1)} \| = \| P e^{(k)} \|$

$\leq \| P \| \, \| e^{(k)} \| \leq \| P \|^2 \| e^{(k-1)} \| \leq \ldots$

$\leq \| P \|^{k+1} \| e^{(0)} \| \qquad \underline{0 \leq a < 1}$

$$0 \leq \| e^{(k+1)} \| \leq \| P \|^{k+1} \| e^{(0)} \|$$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

Teorema dei carabinieri. $\blacksquare$

Teorema: Se il metodo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ è convergente allora $\rho(P) < 1$

Dim: Se è convergente la successione converge $\forall x^{(0)}$ e quindi $e^{(k)} \to 0$ $\forall e^{(0)}$

Prendiamo $e^{(0)} = v$ t.c. $Pv = \lambda v$ con $|\lambda| = \rho(P)$ $\quad (e^{(0)} = x^{(0)} - x)$

$$e^{(k+1)} = P e^{(k)} = \dots = P^{k+1} e^{(0)} = P^{k+1} v = \lambda^{k+1} v = \lambda^{k+1} e^{(0)}$$

$$(P^2 v = P \cdot P v = P \cdot \lambda v = \lambda P v = \lambda^2 v)$$

$$\Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = |\lambda|^{k+1} \underbrace{\|e^{(0)}\|}_{\neq 0}$$

$$\|e^{(k+1)}\| \to 0 \iff |\lambda| < 1$$

Teorema: Se $\rho(P) < 1$ allora il metodo

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \quad \text{è convergente.}$$

dim: (solo x matrici diagonalizzabili)

$$P = V D V^{-1}$$

$$P^{k+1} = V D^{k+1} V^{-1}$$

$$\| P^{k+1} \|_\infty \le \| V \|_\infty \| V^{-1} \|_\infty \rho(P)^{k+1}$$

$$0 \Leftarrow 0 \le \| e^{(k+1)} \|_\infty \le \| P^{k+1} \|_\infty \| e^{(0)} \|_\infty$$

$$\le \| V \|_\infty \| V^{-1} \|_\infty \rho(P)^{k+1} \| e^{(0)} \|_\infty$$

$$\downarrow 0$$

$\boxed{E}$

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente per la

Convergenza è che $\rho(P) < 1$.

$$X^{(k+1)} = P X^{(k)} + q \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Convergente ?

$$\frac{11}{12} = \|P\|_1 = \max\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right\}$$

$$\|P\|_\infty = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} > 1$$

$$\|P\|_\infty > 1 \quad e \quad \|P\|_1 < 1$$

Il metodo è convergente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = M - N$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots \ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & & -0 \\ & O & \vdots \\ & & -0 \\ & & \end{bmatrix}$$

è convergente? Analizziamo le proprietà di $\underline{P}$

$$P = M^{-1}N = M^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & v \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & M^{-1}v \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}v = x \iff Mx = v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ \vdots \\ -0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = -\theta$$

$$\theta x_1 + \theta x_2 + \cdots + \theta x_{n-1} + x_n = 0$$

$$x_n = \theta^2 + \theta^2 + \cdots + \theta^2 = (n-1)\theta^2$$

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & & & -\theta \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & -\theta \\ & & & (n-1)\theta^2 \end{bmatrix}$$

$\varphi(P) = ?$ $\quad P$ è triangolare superiore e quindi

i suoi autovalori stanno sulla diagonale principale

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = (n-1)\theta^2$$

$$\varphi(P) = (n-1)\theta^2$$

è convergente $\iff (n-1)\theta^2 < 1$

$$\iff \theta^2 < \frac{1}{n-1}$$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \theta < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

$$\|P\|_\infty = \max\{|\theta|, (n-1)\theta^2\} < 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \theta \\ \theta & \cdots & \theta & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} & & -\theta \\ & 0 & \vdots \\ & & -\theta \\ -\theta & \cdots -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = P = N = \begin{bmatrix} 0 & & & -\theta \\ & & & \vdots \\ & & & -\theta \\ -\theta & \cdots & -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Condizioni nff su θ affinché il metodo sia convergente

$$\|P\|_\infty = \|P\|_1 < 1$$

$$(n-1)|\theta| < 1$$

$$|\theta| < \frac{1}{n-1} \qquad -\frac{1}{n-1} < \theta < \frac{1}{n-1}$$

Condizioni necessarie e sufficienti $\Rightarrow$ $\varphi(P)$?

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & & \theta \\ & \ddots & \vdots \\ & & \theta \\ \theta & \cdots \; \theta & \lambda \end{bmatrix}\right) = ?$$

$\forall \lambda \neq 0$ la matrice ammette fattorizzazione LU

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \theta \\ \hline \theta & \cdots & \theta & \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline \frac{\theta}{\lambda} & \cdots & \frac{\theta}{\lambda} & \boxed{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & \theta \\ \hline & 0 & & \boxed{x} \end{array}\right].$$

$$x + (n-1)\frac{\theta^2}{\lambda} = \lambda \qquad x = \lambda - (n-1)\frac{\theta^2}{\lambda}.$$

$$\det(\lambda I - P) = \det U \cdot \det L \quad \det L = 1$$

$$= \underbrace{\lambda^{n-1}} \cdot \underbrace{\left[\lambda - \frac{(n-1)\theta^2}{\lambda} \right]} \times$$

$$= \lambda^{n} - (n-1)\theta^2 \lambda^{n-2}$$

$$= \lambda^{n-2} \cdot \left(\lambda^2 - (n-1)\theta^2 \right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{n-1} \cdot \theta$

$$\rho(P) = \sqrt{n-1}\,|\theta| < 1$$

~~$\Leftrightarrow |\theta| < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$~~

Lezione 29/04

Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

$A = M - N$ $\qquad$ $Ax = b$

M invertible.

Jacobi $\qquad A = L + U + D$

$L = \mathrm{tril}(A, -1)$

$U = \mathrm{triu}(A, 1)$

$D = \mathrm{diag}(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$A = L + U + D$

Jacobi $\quad M = D \quad N = -L - U$

(1) Applicabilità $\Leftrightarrow$ M invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{ii} \neq 0$

$i = 1 \dots n$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in K^n \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = N x^{(k)} + b$$

$$a_{jj} x_j^{(k+1)} = b_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$j = 1 \dots n$

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} a_{jl}\, \underline{\underline{x_l^{(k)}}}\right)$$

$j = 1 \dots n$

$k \geq 0$ <u>iterazione di Jacobi</u>

① implementazione richiede 2 vettori

$x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$

② costo computazionale

$\underline{\underline{n n z(A)}}$

<u>Gauss-Seidel</u>

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} a_{jl}\, x_l^{(k)}\right)$$

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}\, x_l^{(k)}}_{} - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl}\, x_l^{(k)}\right)$$

$j = 1 \dots n$

quando calcolo $x_j^{(k+1)}$ ho già calcolato

$$x_1^{(k+1)} \dots x_{j-1}^{(k+1)}$$

Gauss - Seidel

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}\, x_l^{(k+1)}}_{} - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl}\, x_l^{(k)}\right)$$

$j = 1 : n$

$$a_{jj}\, x_j^{(k+1)} = b_j - \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}\, x_l^{(k+1)}}_{} - \sum_{l=j+1}^{n} \dots$$

$$\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} x_l^{(k+1)} + a_{jj} x_j^{(k+1)} = b_j - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$$\sum_{l=1}^{j} a_{jl} x_l^{(k+1)} = b_j - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$j = 1 \dots n$

$$(L+D)\, x^{(k+1)} = b - U x^{(k)}$$

$$\underbrace{M = L + D}_{} \qquad N = -U$$

Applicabile: $\iff$ $a_{ii} \neq 0$ $\quad i = 1 \dots n$

Implementazione: richiede 1 solo vettore

Costo computazionale: $\underline{\underline{O(nnz(A))}}$

<u>Teorema</u>: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>predominante diagonale</u>.

Allora A è invertibile, Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili, Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.

<u>Dim</u>: A p.d. $\Rightarrow$ A invertibile <u>ok</u>

A pred. <u>diag.</u> $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i=1..n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0 \qquad i=1:n$$

$$\Rightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \qquad i=1 \dots n$$

Convergenza dipende da P

dipende dagli autovalori di P

$$\det(\lambda I - P) = \det(\lambda I - \underbrace{M^{-1}N})$$

$$= \det(\lambda M^{-1}M - M^{-1}N) =$$

$$\det(M^{-1}\cdot(\lambda M - N)) =$$

$$\underbrace{\det M^{-1}}_{\neq 0} \cdot \det(\lambda M - N)$$

$$\boxed{\det(\lambda I - P) = 0 \iff \det(\lambda M - N) = 0}$$

λ autovalori di $P \iff \lambda M - N$ matrice singolare

Per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda M - N$ è una matrice singolare?

Se $|\lambda| \geq 1$ facciamo vedere che $\lambda M - N$ è fortemente diagonale $\Rightarrow$ matrice invertibile.

$M = L + D \quad N = -U$

$$\omega M - N = \omega(L+D) + U$$

$$|\omega a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\omega a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$i = 1..m$

pf: $$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$|\omega||a_{ii}| > |\omega| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\omega| \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$|\omega a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\omega a_{ij}| + |\omega| \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i-1} |\omega a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad n \geq 2$$

1. Dire per quali valori di α A è p.d.?
2. Dire per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente.
3. Dire per quali valori di α il metodo di G.-S. è convergente

---

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{bmatrix}$$

1. Dimostrare che il metodo di Jacobi è convergente
2. Determinare la Tale ak

$$\frac{\|e^{(k)}\|_\infty}{\|e^{(0)}\|_\infty} \le 2^{-32}$$

$\forall\, e^{(0)} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \alpha \\ -1 & \ddots & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \text{ p.d.?}$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

$i = 1 \qquad 1 > |\alpha| \;(\Leftarrow)\; |\alpha| < 1$

$i = 2 \dots n \qquad 2 > |-1| = 1 \quad$ noi

per nessun valore di α

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

G-S ?

$$P = G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 \quad 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & & -\alpha \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \Big| & \dots & \Big| & 0 & \Big| & M^{-1}v \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} v_2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = X$$

$$M X = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = -\alpha \qquad -X_1 + X_2 = 0 \qquad X_2 = X_1 = -\alpha$$

$$-X_2 + X_3 = 0 \implies X_3 = X_2 = -\alpha$$

$$M^{-1} v_2 \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \vdots \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} & & -\alpha \\ & 0 & \vdots \\ & & -\alpha \end{bmatrix} \qquad \rho(P) = |\alpha|$$

G-S è convergente $\iff |\alpha| < 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = P_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & & -\alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

chi sono gli autovalori ?

(1) posso calcolare il polinomio caratteristico ....

(2) $J\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -\alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha x_n = \delta x_1 \\ x_1 = \delta x_2 \\ x_2 = \delta x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} = \delta x_{n-1} \\ x_{n-1} = \delta x_n \end{cases}$$

$$x_1 = \delta x_2 = \delta^2 x_3 = \delta^3 x_4 = \cdots = \delta^{n-1} x_n$$

$$-\alpha x_n = \delta \cdot \delta^{n-1} x_n = \delta^n x_n$$

$$(x_n \neq 0) \ \text{alors} \Rightarrow \underline{\delta^n = -\alpha}$$

$$|\delta^n| = |-\alpha| = |\alpha|$$

$$|\delta|^n = |\alpha| \qquad |\delta| = \sqrt[n]{|\alpha|}$$

$$\sqrt[n]{|\alpha|} < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$$

$$\varphi(G) = |\alpha| \qquad \varphi(J) = \sqrt[n]{|\alpha|}$$

$$0 \le \rho(G) < \rho(J) < 1$$

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{bmatrix}$$

Studiare la converg. di Jac. e G-S.

$n > n-1 \Rightarrow A$ p.d.

$\Rightarrow J$ e G convergono