Lezione 08/07

— Metodi per la risoluzione di equazioni non lineari.

Sono Iterativi $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $x_k \to \alpha$

— Metodi: metodo di bisezione; metodi di iterazione funzionale.

— Elementi distintivi: velocità di convergenza; regolarità della funzione.

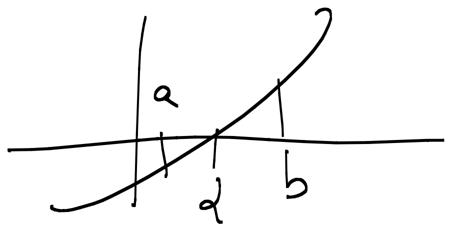
In generale i metodi di iterazione funzionale (es: tangenti o Newton) al prezzo di una maggiore regolarità richiesta raggiungono una migliore convergenza.

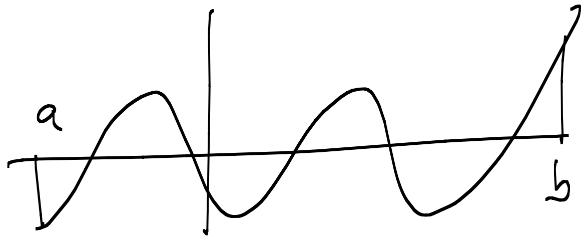
Metodo di Bisezione

— il più antico — presumibilmente il più semplice.

Teorema esistenza degli zeri: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $f \in C^0([a,b])$.

Se $f(a)f(b) < 0$ allora $\exists\, \alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$.





Problema: dato $a < b \in \mathbb{R}$ tc $f(a)f(b) < 0$, $f \in C^0([a,b])$

determinare α tc $f(\alpha) = 0$

```
a_1 = a ; b_1 = b ;
for k = 1 : inf
    c_k = (a_k + b_k) / 2        (punto di mezzo di [a_k, b_k])
    if( f(c_k) f(a_k) <= 0 )
        a_{k+1} = a_k ; b_{k+1} = c_k ;
    else
        a_{k+1} = c_k ; b_{k+1} = b_k ;
    end
end
```

Teorema: Se $[a_1, b_1] = [a, b]$ è un intervallo di separazione per

f, $f \in C^0([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$, allora

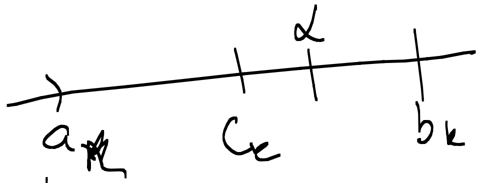
$$a_k,\ b_k,\ c_k \longrightarrow \alpha$$

<u>Dim</u>: Sia α la radice contenuta in $[a, b]$. Allora per costruzione

$\alpha \in [a_k, b_k]$.

$$0 \le |\alpha - a_k| \le |b_k - a_k| = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} |\alpha - a_k| = 0$$



Analogamente per b_k: $\quad 0 \le |\alpha - b_k| \le \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$

per c_k: $\quad 0 \le |\alpha - c_k| \le \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k}}$ —— Notare!!

Stima a priori del numero di passi

Se voglio determinare approssimazione di α denotata con $\hat{\alpha}$ t.c.

$$|\hat{\alpha} - \alpha| \le \epsilon$$

allora $\quad |c_k - \alpha| \le \dfrac{b_1 - a_1}{2^k} \le \epsilon$

$$\frac{b_1 - a_1}{2^k} \le \epsilon \iff 2^k \ge \frac{b_1 - a_1}{\epsilon}$$

$$\iff k \ge \log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \log_2(b_1 - a_1)$$

Ci vogliono circa $\log_2\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)$ passi del metodo.

<u>Convergenza</u>: Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \to \alpha$ e $x_k \neq \alpha$ $\forall k$

- $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge linearmente se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \ell < 1$$

- $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge almeno quadraticamente se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = C \in \mathbb{R}$$

Convergenza lineare: $|x_{k+1}-\alpha| \simeq \ell \cdot |x_k-\alpha|$

Convergenza almeno quadratica: $|x_{k+1}-\alpha| \simeq C\, |x_k-\alpha|^2$

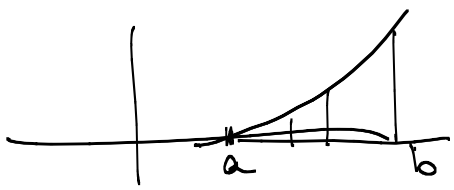
Notevole differenza nel numero di passi

Es: $\ell = \frac{1}{2}$ $\quad C = 1$ $\quad |x_0-\alpha| = \frac{1}{2}$

Convergenza lineare $\quad \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \;\ldots\ldots\; \frac{1}{2^{k-1}}$

Convergenza quadratica $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^8} \;\ldots\ldots\; \frac{1}{2^{2^{k-1}}}$

Il metodo di bisezione presenta tipicamente convergenza lineare



$$|c_{k+1}-\alpha| = \frac{1}{2}|c_k-\alpha|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}-\alpha|}{|c_k-\alpha|} = \frac{1}{2}$$

METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE

$$\boxed{f(x)=0} \iff \boxed{x=g(x)}$$

Esempio $\quad f(x)=0 \iff x=\underbrace{x-f(x)}_{g(x)}$

$$f(x)=0 \iff x = \underbrace{x-\frac{f(x)}{h(x)}}_{g(x)}$$

($h(x)$ definita e non nulla sugli zeri di $f(x)$)

$$\boxed{f(x)=0} \iff \boxed{x=g(x)} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1}=g(x_k) \end{cases}$$

$$\boxed{f(\alpha)=0} \iff \boxed{\alpha = g(\alpha)}$$

α punto fisso di $g(x)$

α zero di $f(x)$

Teorema (del punto fisso): sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $g \in C^1([a,b])$.

$\alpha \in (a,b)$, $g(\alpha) = \alpha$. Se $\exists\, \rho > 0$ t.c.

$$|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in \underbrace{[\alpha-\rho, \alpha+\rho]}_{I_\alpha} \subset [a,b]$$

allora il metodo $\begin{cases} x_0 \in I_\alpha \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$ genera successioni tali che:

(1) $x_k \in I_\alpha \quad \forall k \geq 0$

(2) $\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha$

Dim: Weierstrass $\Rightarrow \max_{x' \in I_\alpha} |g'(x')| = \lambda < 1$

Dimostriamo per induzione che $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho \quad \forall k \geq 0$

Passo base $k=0$ $|x_0 - \alpha| \leq \lambda^0 \rho = \rho$ ok per ipotesi ($x_0 \in I_\alpha$)

Supponiamo vero fino a k e dimostriamo per $k+1$ $\rightarrow$ Lagrange

$$|x_{k+1}-\alpha| = |g(x_k)-g(\alpha)| = |g'(\xi_k)|\,|x_k-\alpha|$$

$$|\xi_k-\alpha| \leq |x_k-\alpha| \leq \lambda^k \rho < \rho \Rightarrow \xi_k \in I_\alpha$$

$$|x_{k+1}-\alpha| = |g'(\xi_k)|\,|x_k-\alpha| \leq \lambda \cdot \lambda^k \rho = \lambda^{k+1}\rho$$

$$0 \leftarrow 0 \leq \underset{\downarrow 0}{|x_k-\alpha|} \leq \lambda^k \rho \rightarrow 0$$

$\boxed{}$

Corollario: Sia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $g\in C^1([a,b])$, $g(\alpha)=\alpha$.

Se $|g'(\alpha)|<1$ allora $\exists\, \rho>0$ t.c. posto $I_\alpha=[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$

il metodo $\begin{cases} x_0\in I_\alpha \\ x_{k+1}=g(x_k) \end{cases}$ genera successioni che soddisfano ① e ②.

Dim: $h(x)=|g'(x)|-1$ continua in $[a,b]$

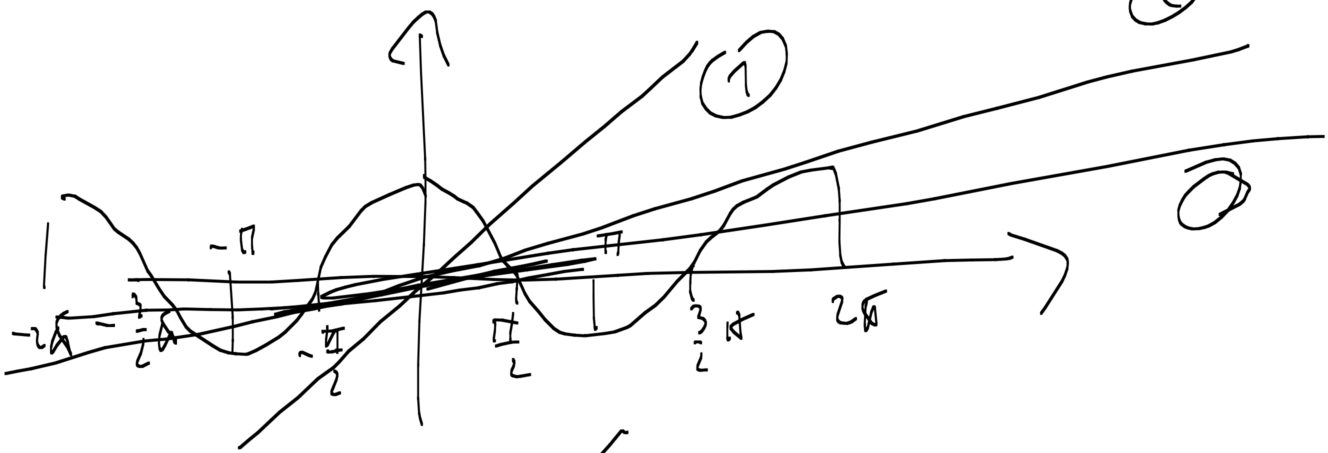
$$h(\alpha)=|g'(\alpha)|-1<0 \Rightarrow$$

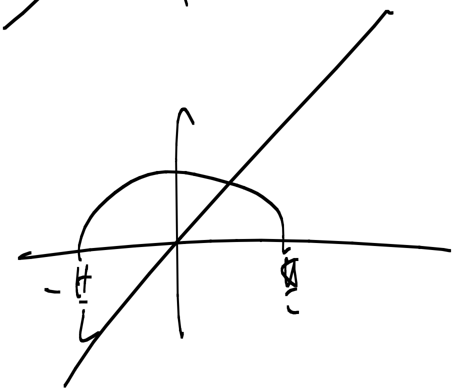
Teorema della permanenza del segno. $\exists$ un intorno dove vale

$$h(x) < 0 \iff |g'(x)| < 1 \qquad \blacksquare$$

$$f(x) := x - \cos x = 0$$

$$x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$$





$$\frac{\pi}{2} > 1$$

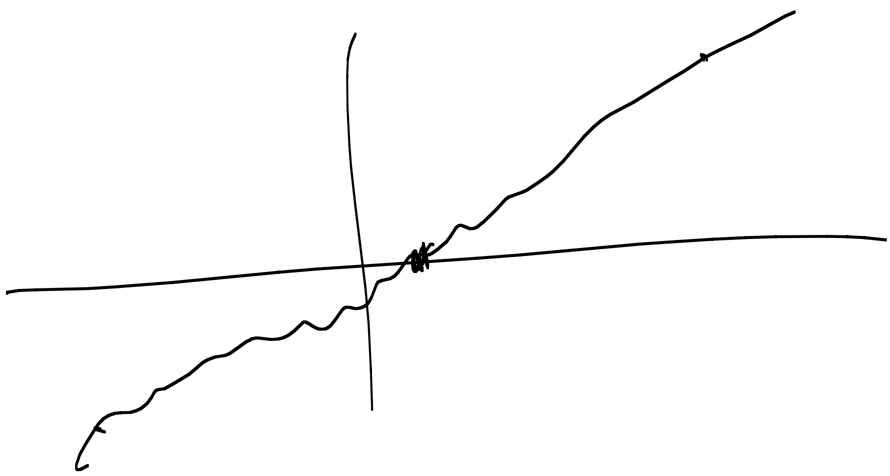
$$-\frac{\pi}{2} < -1$$

$$f(x) = x - \cos x$$

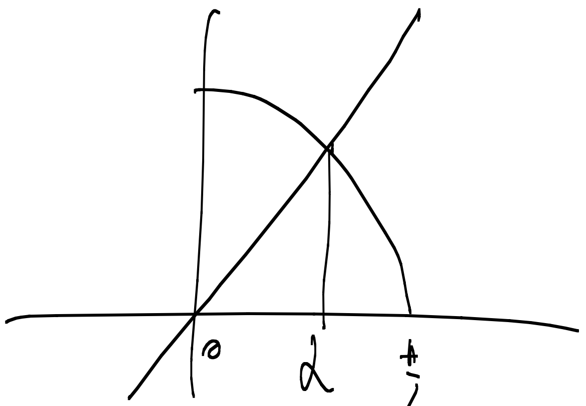
$$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \cos x = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \forall x$$



$$x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$$

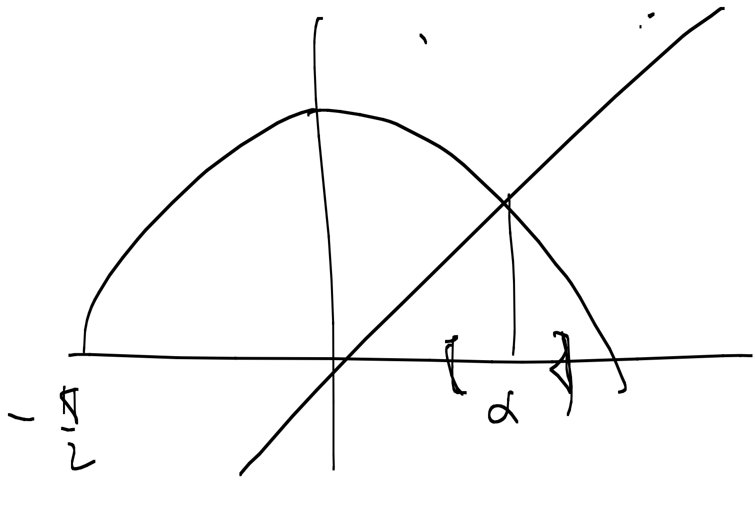
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = \cos x_k \end{cases} \qquad g(x) = \cos x$$

$$|g'(\alpha)| = |-\sin \alpha| = |\sin \alpha| < 1$$

Il metodo è localmente convergente perché $\exists$ un intorno di α tc se $x_0 \in I_\alpha$ $x_k \to \alpha$

$$|g'(x)| < 1 \iff |\sin x| < 1$$

soddisfatta se: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\alpha < \frac{\pi}{4}$ o $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$?

Indicazione sulla scelta del punto iniziale