Note all'esercitazione del 29/11/19 (e del 27/11/19)

Parte prima <u>teoria</u> (per la sezione B)

CAMBIO DI VARIABILI

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \overset{T.B.}{=} \lg|2| - \lg|1| = \lg 2, \quad a \neq 1 \int_1^2 \frac{1}{t^a}\,dt = \frac{1}{1-a}\left(2^{1-a} - 1^{1-a}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-a}\left(2^{1-a} - 1\right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3s+1}\,ds = \lg \sqrt[3]{\frac{7}{4}} \quad , \quad \frac{1}{z+1} \quad , \quad \frac{1}{x} \overset{x>0}{=} (\lg x)'$$

$$(\lg(3s+1))' = 3 \cdot \frac{1}{3s+1} \quad : \quad \frac{1}{3s+1} = \left(\frac{1}{3}\lg(3s+1)\right)' \quad \text{abbiamo isolato } 3s+1$$

e la si è considerata come variabile di integrazione e quindi e quindi si è usata la regola della derivata per una funzione composta: G ed f derivabili

$$(*)\quad \left[G(f(t))\right]' = \frac{d}{dt}\left[G(f(t))\right] = \frac{dG}{dx}\Big|_{x=f(t)}(f(t)) \cdot \frac{df}{dt}(t) =$$

$$= \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se $f \in C^1[a,b]$, $g \in C[a,b]$.

$$\int_a^{\tilde{b}} g(f(t))\, f'(t)\, dt$$

usiamo due volte T.B.: $\exists G$ $G' = g$ su $[a,b]$

e.g. $G(x) = \int_a^x g(y)\,dy$

e quindi dalla regola per la der. di funz. comp.

(✱) si ha

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)\,dt \overset{\star}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = G(f(b)) - G(f(a))$$

NOTA: non è detto che f sia iniettiva, può essere $f(b) < f(a)$

e.g.

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{3t+1}} = \boxed{\frac{1}{3}} \int_1^2 \frac{\boxed{3}\,dt}{\sqrt{3t+1}} =$$

$f'(t)$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

"$dx = f'(t) \cdot dt$" $x = f(t)$ $f(t) = 3t + 1$

$$\overset{\star}{=} \int_{f(1)}^{f(2)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{7} - 4$$

A livello di primitive se G e f sono derivabili su un intervallo ($G' = g$)

$*$ si scrive

INSIEME DELLE PRIMITIVE $\longrightarrow \int g \circ f \cdot f' = G \circ f + c$ (su un intervallo)

notare sia la somiglianza con la regola di sostituzione sia le differenze nelle ipotesi

es. $\displaystyle \int \frac{dt}{t} = \begin{cases} \log t + c & t > 0 \\ \log(-t) + d & t < 0 \end{cases}$

cf. domanda 3 TEST PRIMO FOGLIO IX

es D.1 TEST PRIMO IX FOGLIO

$\int \sin(\pi x + 2\pi)$ $\exists\, \varphi$ tale che $\varphi(0) = 1$

$dy = \pi\, dt$

$y = \pi t + 2\pi$

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(\pi t + 2\pi)\, dt + C =$$

$$\varphi(0) = C \Longrightarrow C = 1$$

$(-\cos y)' = \sin y$

$$= \int_{\pi \cdot 0 + 2\pi}^{\pi \cdot x + 2\pi} [\sin y] \frac{1}{\pi}\, dy + 1 = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x + \frac{1}{\pi} + 1$$

Osservazione: abbiamo risolto il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(\pi t + 2\pi) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

D2 I-IX TEST vedi esempi precedenti

es

$$\int_1^2 \frac{\boxed{dx}}{e^x - 1} = \int_e^{e^2} \boxed{\frac{dt}{t}} \frac{1}{t-1} =$$

$t = e^x$ $\quad dt = e^x dx$

t tra e ed e^2 $\quad dx = e^{-x} dt = \frac{1}{t} dt$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{t(t-1)}\, dt \overset{\text{LINEARITÀ}}{=} * - \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} + \int_e^{e^2} \frac{dt}{t-1} = -2+1 + \lg(e+1).$$

di $\frac{1}{t}$ e $\frac{1}{t-1}$ sappiamo calcolare le primitive

$$\frac{1}{t(t-1)} \overset{?}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} =$$

vediamo se ci sono A e B per cui è vero

$$= \frac{At - A + tB}{t(t-1)}$$

$$1 \overset{?}{=} (A+B)t - A \quad \forall t \in [e; e^2]$$

basterebbero due condizioni indipendenti. ne infinite una per ogni t scelgo le più comode in questo caso

$$\begin{cases} t=0 & 1 = -A \quad * \\ t=1 & 1 = B \end{cases}$$

es. $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x)^2\, dx$

I modo: per parti cfr lez. del 28/27

II: sostituzione?

$$\int_0^{\pi} \cos x \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\, dx =$$

$$\cos x = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 x} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\sqrt{1-\sin^2 x} & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \qquad y = \sin x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy - \int_1^0 \sqrt{1-y^2}\, dy = 2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy$$

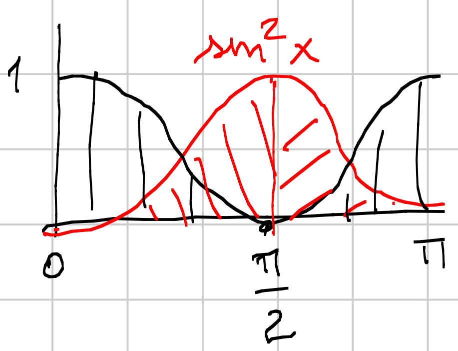
$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= 2\int_0^1 (1-y^2)\underbrace{\boxed{\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}}}_{dz} \cancel{= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 z)\, dz \quad z = \arcsin y}$$

$$= 2\int_0^1 (1-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \overset{\text{PARTI}}{=} 2\cancel{\left[(1-y^2)\arcsin y\right]_0^1} - 2\int_0^1 -2y \cdot \arcsin y\, dy =$$

$$= 4\int_0^1 y \cdot \arcsin y\, dy \quad \ldots \text{ mmh} \ldots$$

III modo grafico



$y = \cos^2 x$

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^2 \, dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^2 \, dx$$

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^2 \, dx$$

obiettivo calcolare l'area

$$2 \int_0^{\pi} (\cos x)^2 \, dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 \, dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^2 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

NOTA

$y = \cos x$

$$\int_a^b (\cos x)^m (\sin x)^{2n+1} \, dx = -\int_{\cos a}^{\cos b} y^m (1-y^2)^n \, dy$$

D3 1-IXT : già fatte

D4
$$\int_0^2 f(t)\,dt \overset{\text{additività}}{=} \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int_1^2 \frac{4x-2}{2x+1}\,dx$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1+e^x} & x \in [0,1] \\ \dfrac{4x-2}{2x+1} & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\overset{y=e^x}{=} \int_1^e \frac{dy}{1+y} + \overset{\pm 2 \text{ al num}}{} \int_1^2 \left(2 - \frac{4}{2x+1}\right) dx \overset{\text{linearità}}{=}$$

$$= \left(\lg \frac{1+e}{2}\right) + 2 - 4\int_1^2 \frac{dx}{2x+1} = \left(\lg \frac{1+e}{2}\right) + 2 - 4\int_1^2 \frac{1}{2}\left(\lg(2x+1)\right)' dx =$$

$$= \left(\lg\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) + 2 - 2\lg\frac{5}{3} = \lg\frac{1+e}{2}\,\frac{9}{25} + 2 =$$

$$= 2 + \lg(1+e)\frac{9}{50}.$$

D 5

ben di la sa.

$$\left(\cos\omega + i\sin\omega =: e^{i\omega} \qquad e^{a+i\omega} = e^{a}(\cos\omega + i\sin\omega)\right)$$

$$\int_0^{\pi} \underset{g}{e^{2x}}\,\underset{f'}{\sin x}\,dx = -e^{2x}\cos x\Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \underset{g'}{e^{2x}}\,\underset{f}{\cos x}\,dx = e^{2\pi} + e + 2\int_0^{\pi} \underset{g}{e^{2x}}\,\underset{f'}{\cos x}\,dx$$

$$= e^{2\pi} + e + 2\cancel{\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\pi}} - 2\cdot 2\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$$

$$5\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx = \frac{e^{2\pi}+e}{5}$$

D6 Primitiva di $\frac{1}{x^2+x+1}$

$a>0 \quad ax^2+bx+c =$

$= ax^2 + 2 \boxed{\frac{b}{\sqrt{a}} x \cdot \sqrt{a}} + c$

$= ax^2 + 2\frac{b}{\sqrt{a}} \cdot x\sqrt{a} + \frac{b^2}{a} + c - \frac{b^2}{a}$

$= \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$

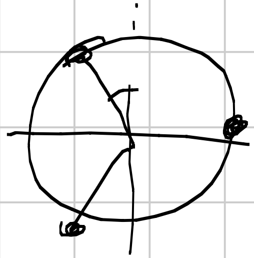
nota prima si era fatto $\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$

$$\frac{1}{(t+a)(t+b)} = \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+b} \qquad a \neq b$$

ma x^2+x+1 non ha radici reali

(in campo complesso

$(t-1)(t^2+t+1) = t^3-1$



$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(x^2+x+1) = (x-1) \cdot$
$\cdot \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$
$\cdot \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$)

Sappiamo $\frac{1}{(t+1)^2}$, $\frac{1}{t^2+1}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{(ax+b)^2+c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}\right)^2 + 1}$

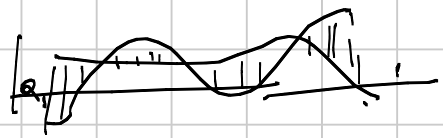
$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \cancel{\frac{4}{3}}\,\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)'$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

<u>NOTA</u> intuitivamente "l'area" tra due grafici di $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



D7 $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_1^{r}\left(x^{\pi}+1\right)^{\frac{1}{\pi}}-\left(x^{\frac{1}{\pi}}+1\right)^{\pi}\,dx$

raccogliere l'infinito più grosso

$$x\left[\left(1+\frac{1}{x^{\pi}}\right)^{\frac{1}{\pi}}-\left(1+\frac{1}{x^{1/\pi}}\right)^{\pi}\right]$$

SVILUPPO BINOMIALE

$$= x\left[\cancel{1}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^{\pi}}+o\left(\frac{1}{x^{\pi}}\right)-\cancel{1}-\pi\frac{1}{x^{1/\pi}}+o\left(\frac{1}{x^{1/\pi}}\right)\right]$$

$x\to+\infty$

$$=\boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^{\pi-1}}+o\left(\frac{1}{x^{\pi-1}}\right)}-\boxed{\pi\frac{1}{x^{1/\pi-1}}+o\left(\frac{1}{x^{1/\pi-1}}\right)}$$

per def σ in particolare

su una semiretta

$$\left|\sigma\left(\frac{1}{x^{\pi-1}}\right)\right| \le \frac{1}{4}\left|\frac{1}{x^{\pi-1}}\right|$$

$$\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^{\pi-1}} \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^{\pi-1}} + \sigma \le \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{x^{\pi-1}}$$

analogamente

$$0 \le (\pi+1)\frac{1}{x^{1/\pi-1}} \le (\pi+1)\frac{1}{x^{1/\pi-1}}$$

$f(x)$ INTEGRANDA $\geq \left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^{\pi-1}} - (\pi+1)\frac{1}{x^{1/\pi-1}}$

$$\int_1^r f(x)\,dx \geq \left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)\int_1^r \frac{1}{x^{\pi-1}}\,dx - (\pi+1)\int_1^r \frac{dx}{x^{1/\pi-1}}\,dx$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{\pi}\right)\left[\frac{1}{r^{\pi}}-1\right] = \left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{x^{1/\pi-1}} = x^{1-\frac{1}{\pi}} \geq 1 \quad \text{se } x \geq 1$$

($1-\frac{1}{\pi} > 0$)

$$\int_1^r \frac{dx}{x^{1/\pi-1}} \geq r-1$$

es. $\int_0^{r} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \, dx = \int_0^{r} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \, dx \geq$

$\geq \int_0^{r} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{r} - 2 \cdot \sqrt{0} = 2\sqrt{r} \xrightarrow{\sqrt{r} \to +\infty} +\infty$

D8

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^x t^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) dt$$

$$= -\frac{1}{x^4}\int_0^x t^2 \sin t \, dt = -\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 - \cos\xi_t \cdot \frac{t^5}{6}$$

$$= -4 + \frac{1}{x^4}\int_0^x \underbrace{\cos\xi_t \frac{t^5}{6}}_{f} \, dt$$

$$\frac{1}{x^4}\left|\int f\right| \le \frac{1}{x^4}\int |f| \le \frac{1}{\cancel{x^4}} x^6 = x^2 \to 0$$

$$|f| \le \frac{t^5}{6}$$

D 10 $\quad \lg(1+e^x) \sim x$

$$\int_e^n x = \frac{n^2}{2}$$

Test del II 1x foglio

D 6, 7 fatte