Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ numeri naturali = numeri interi non negativi

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ numeri interi, positivi e negati

$\mathbb{Q}$ numeri razionali = "frazioni"

numeri del tipo $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

classi di equivalenza di frazioni

$\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{6}{4}$ sono equivalenti

$\mathbb{R}$ numeri reali.

$\mathbb{Q}$ e <u>molto altro</u>

es. $\sqrt{2}$, π, e, ...

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

$A \subset B$ A contenuto in B

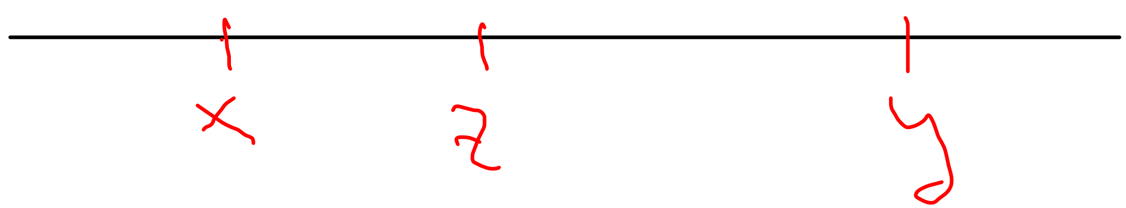
va bene anche se $A = B$.

$A \subset B$ a volte si scrive $A \subseteq B$

$A \subsetneq B$ $A \subset B$ e $A \neq B$.

Intervalli di $\mathbb{R}$.

Def: $I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$, dato z t.c. $x < z < y$ risulta $z \in I$.



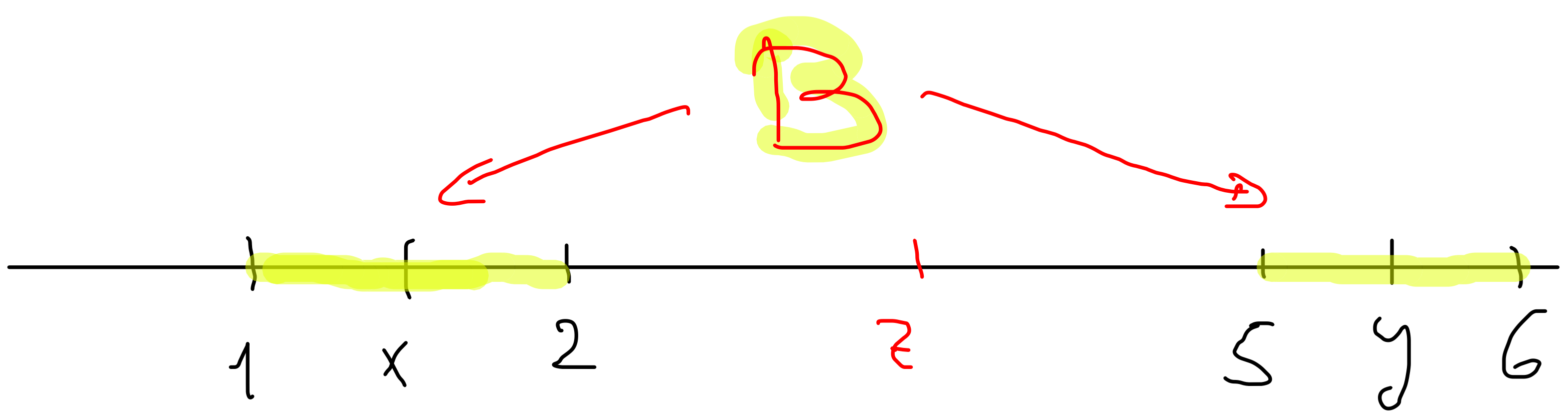
in un intervallo "non ci sono buchi"

Es: $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$

A è un intervallo.

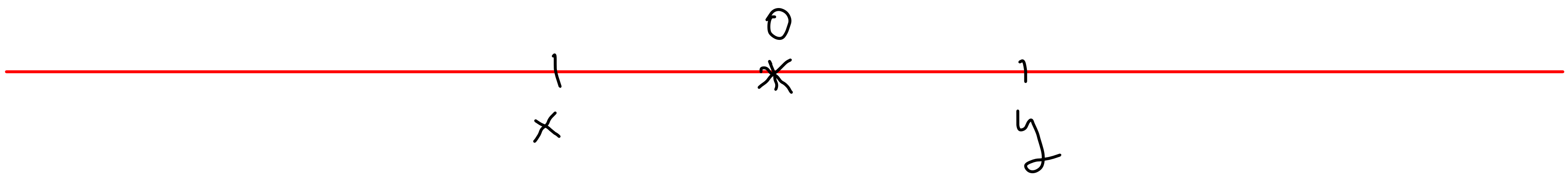
$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2$ oppure $5 < x \leq 6\}$

B non è un intervallo.



$x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{11}{2}$ $\quad z = 3$ $\quad x < z < y$ ma $z \notin B$.

$C = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ non è un intervallo



$x = -1$, $y = 1$ $\qquad -1 < 0 < y$ ma $0 \notin C$.

Notazione

dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

intervallo chiuso

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

intervallo aperto

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

semiretta chiusa

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

semiretta aperta

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ semiretta chiusa

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ semiretta aperta.

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Funzioni

Una funzione è una terna di oggetti

A, B, f

A, B insiemi, A si dice dominio

B si dice codominio

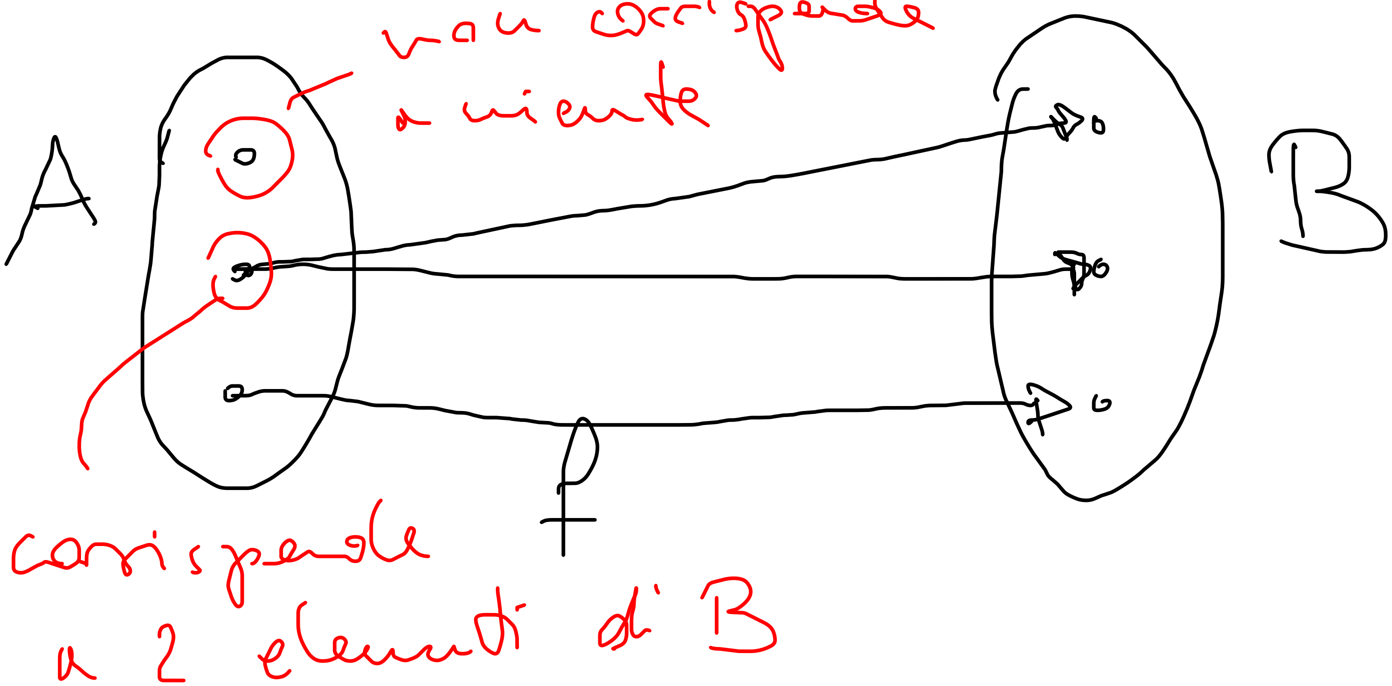
f è una legge che lega gli elementi di

A a quelli di B.

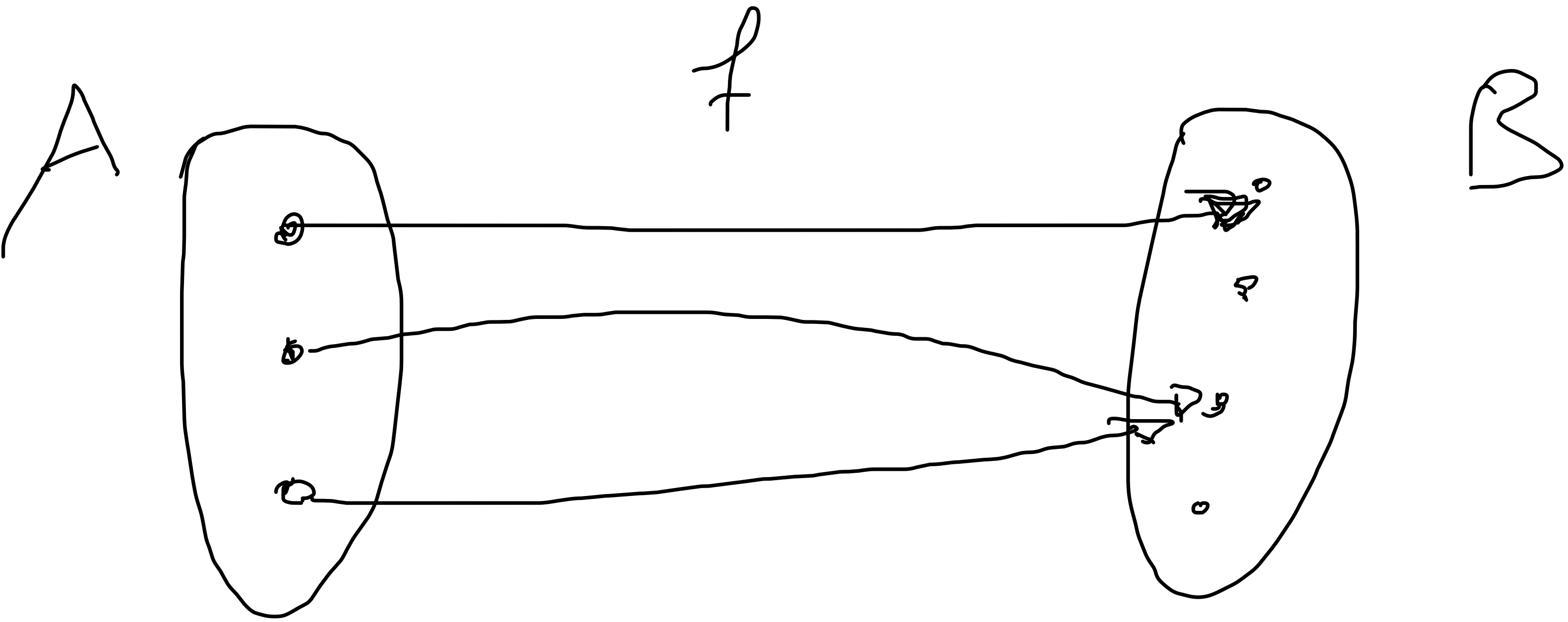
$$f : A \longrightarrow B$$

f mette in corrispondenza

ogni elemento di A con un solo elemento di B. (tutti gli elementi di A devono essere messi in corrispondenza con un elemento di B e uno solo).



non è una funzione



è una funzione.

Grafico di f

$$\mathrm{graph}(f) = \{ (a,b) \in A \times B \ \text{ t.c. } \ b = f(a) \}$$

Es: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x$

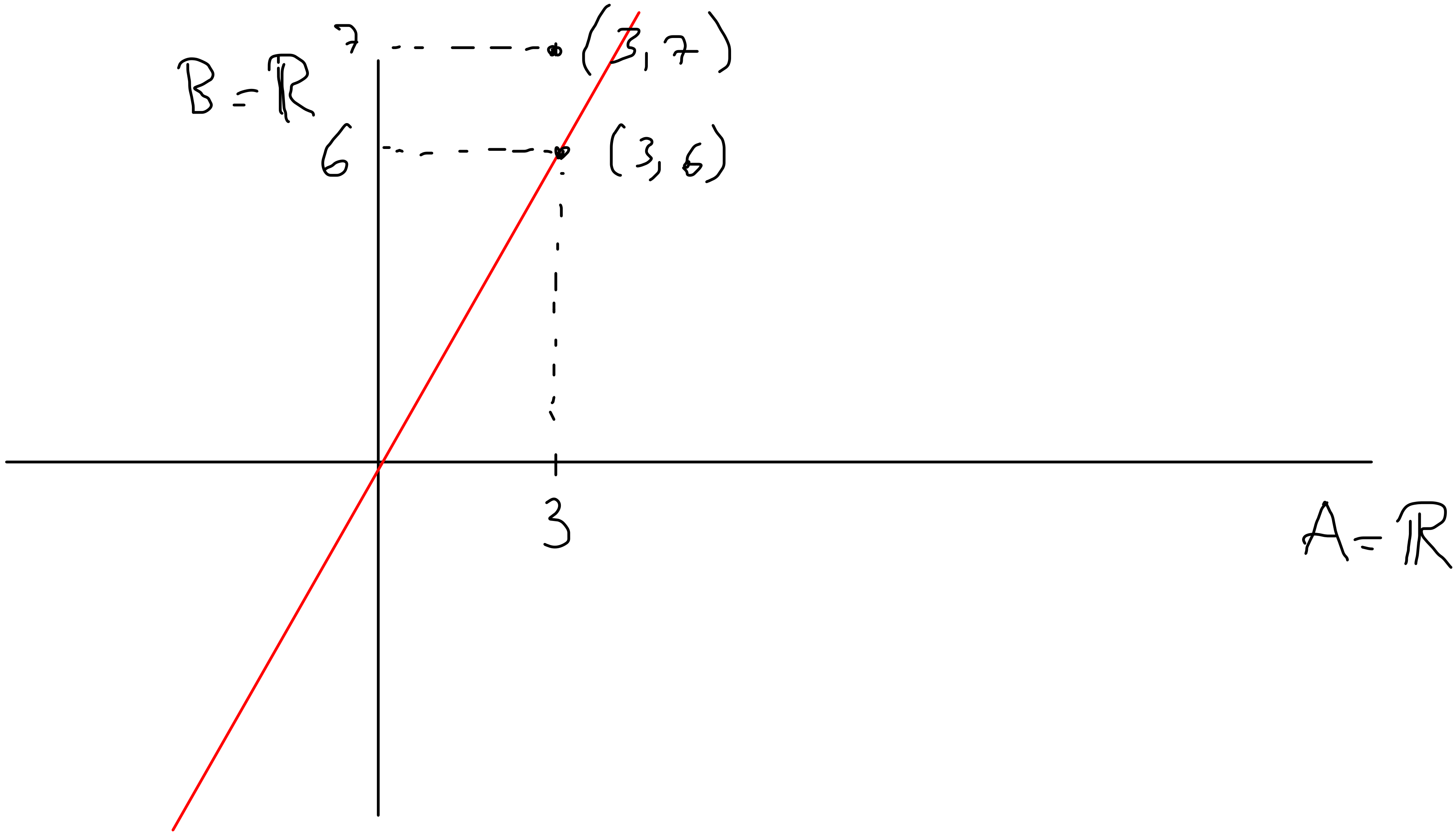
$(3, 6) \in graph(f)$ perché $6 = f(3)$

$\ \downarrow \ \ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b = f(a)$

$\ a \ \ \ b$

$(3, 7) \notin graph(f)$ perché $7 \neq f(3)$.

$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ piano Euclideo



Def: $f : A \to B$ funzione

$D \subset A$ $\qquad f(D) = \{ f(x) : x \in D \}$

$f(D)$ si dice immagine di D attraverso f

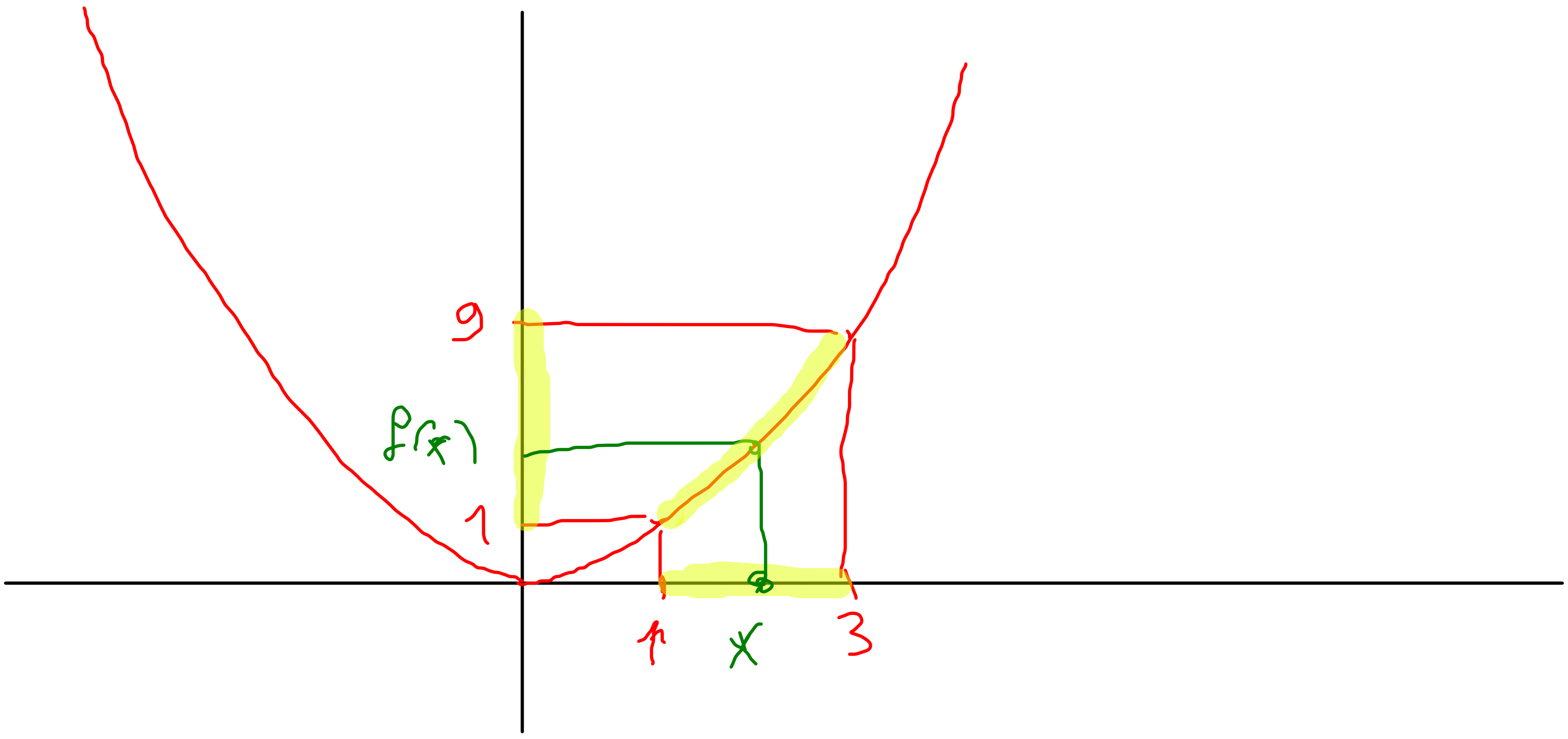
$f(D) \subset B$

$\mathrm{Imm}(f) = f(A)$ immagine di f

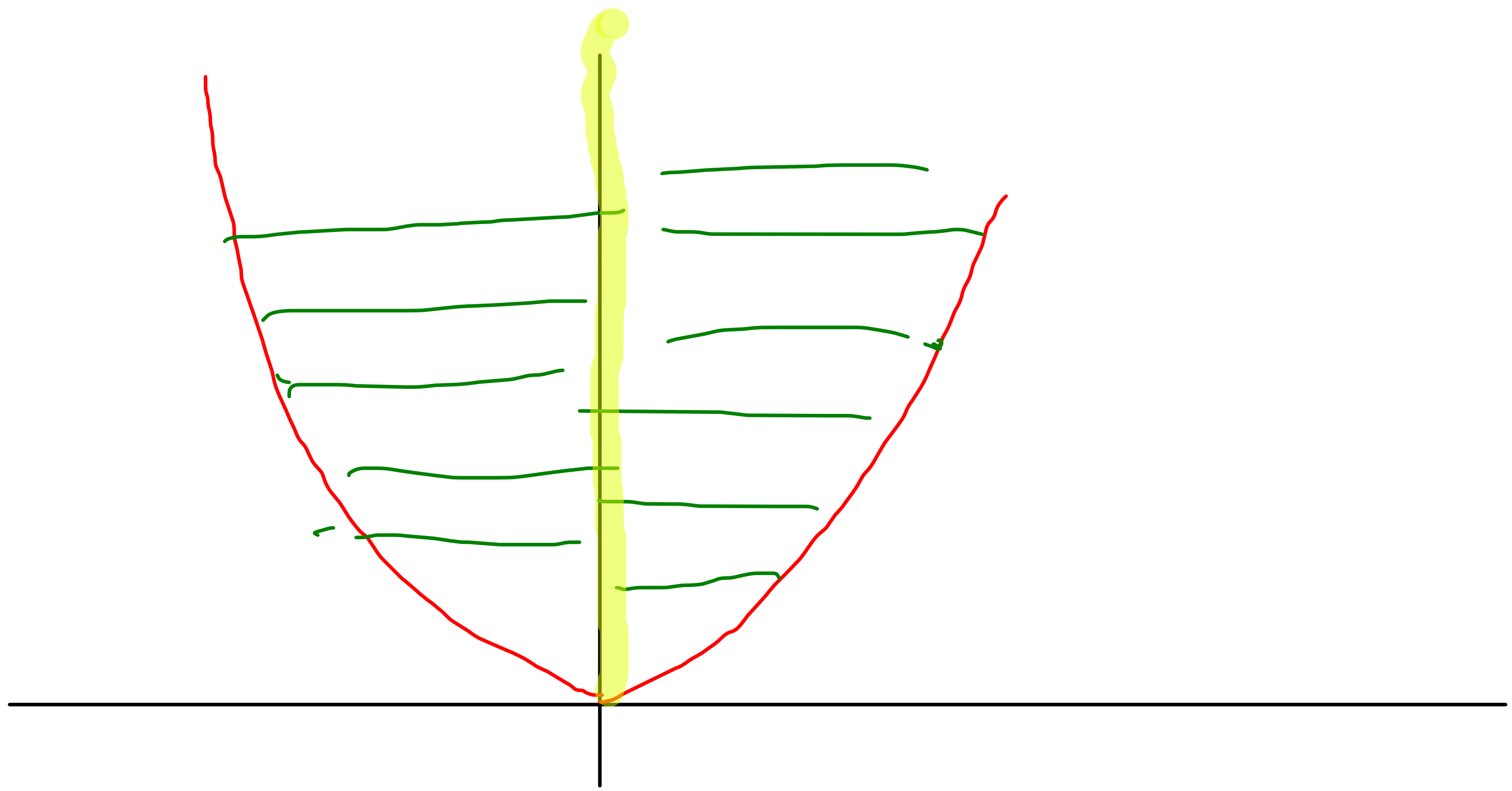
immagine di tutto il dominio attraverso f

Es: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$D = [1, 3]$ $f(D) = [1, 9]$



$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$



Def: $f: A \to B$ si dice iniettiva se $\forall\ \cancel{x}_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ risulta

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$$f(-3) = 9 \qquad f(3) = 9 \qquad x_1 = -3,\ x_2 = 3$$

$$x_1 \neq x_2 \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

$\Rightarrow f$ non è iniettiva.

Es: $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2$

g è iniettiva.

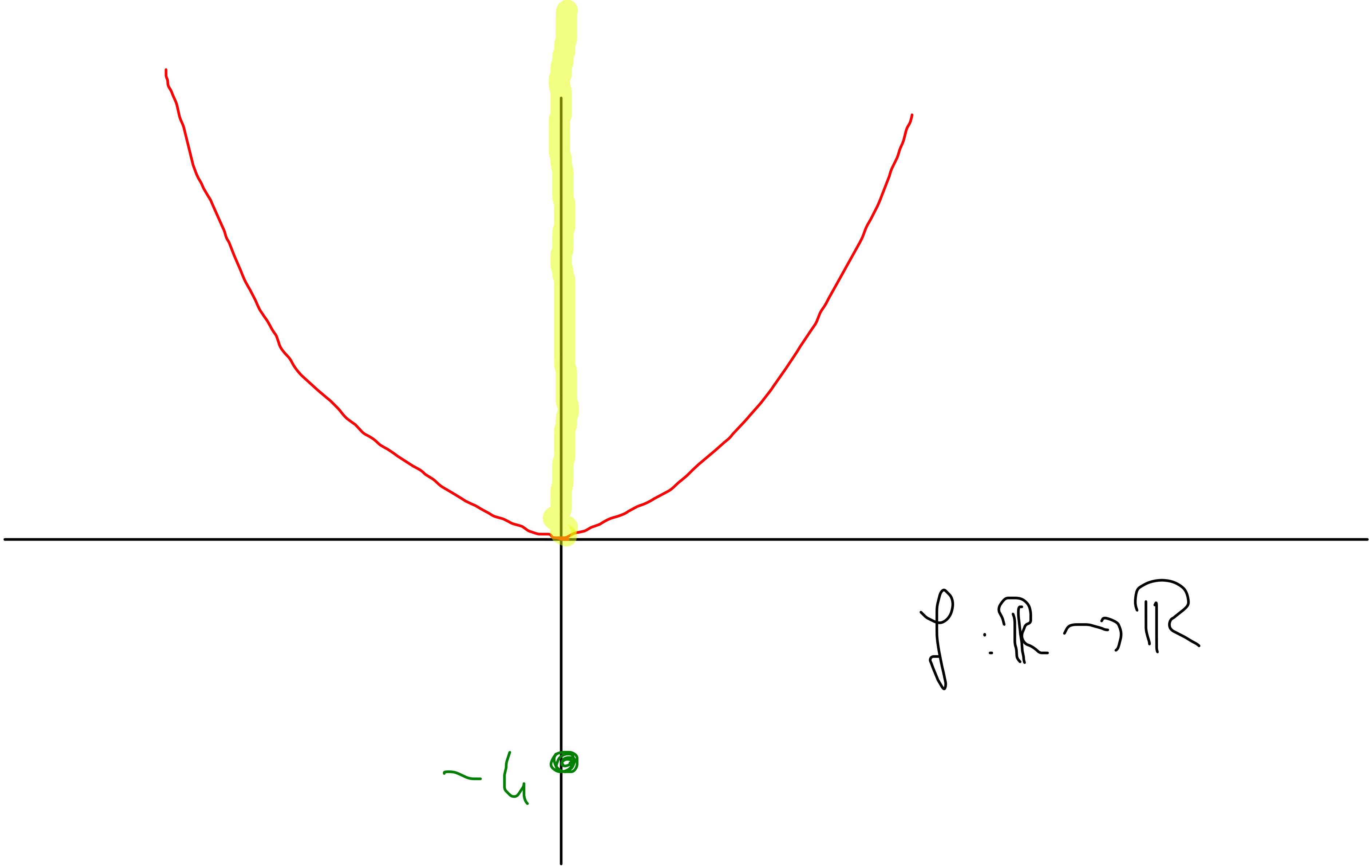
Def: $f: A \to B$ si dice surgettiva se $\forall\, y \in B$ $\exists$ almeno un elemento $x \in A$ t.c. $f(x) = y$.

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$-4 \in \mathbb{R}$ (codominio)

$\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = -4$ ($x^2 = -4$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$).

f non è surgettiva

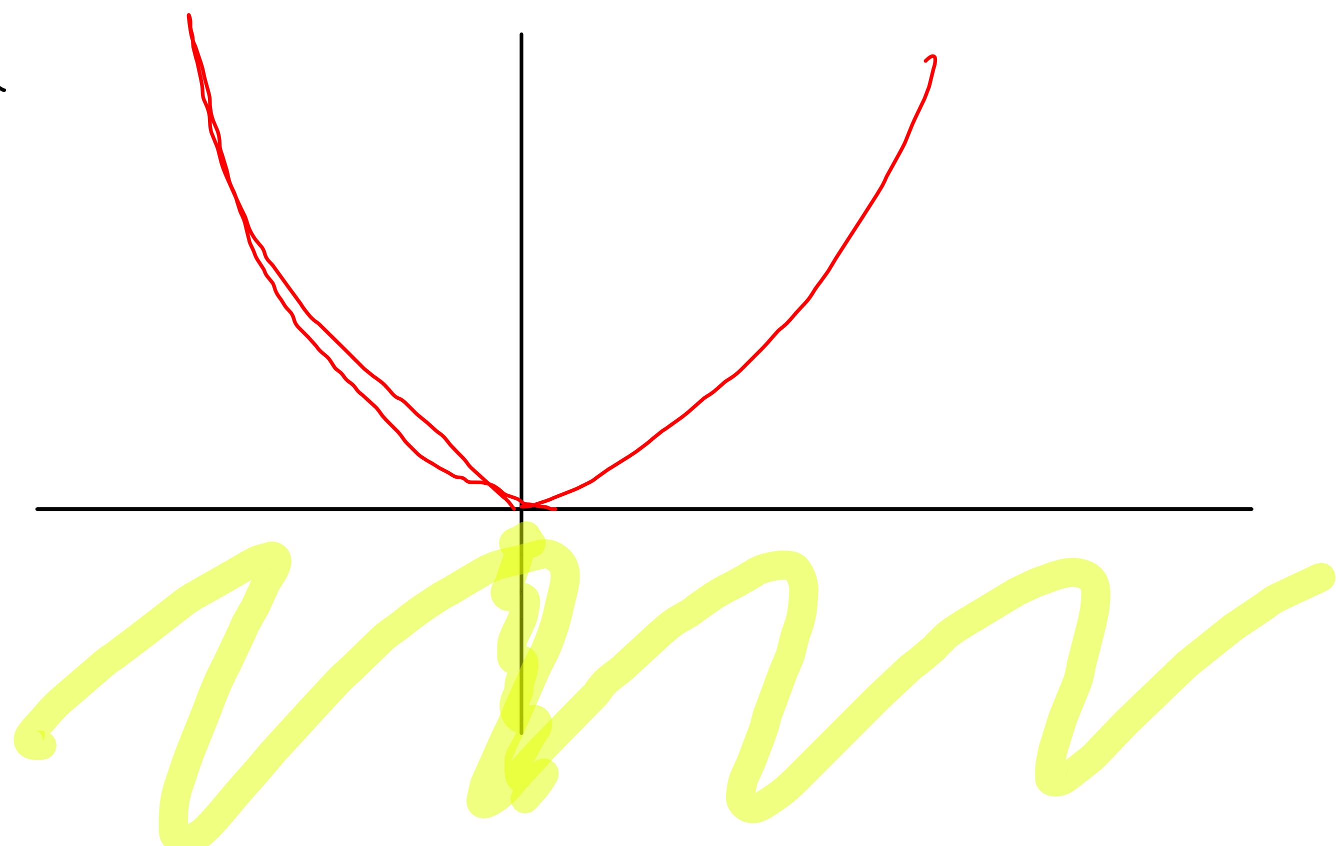


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

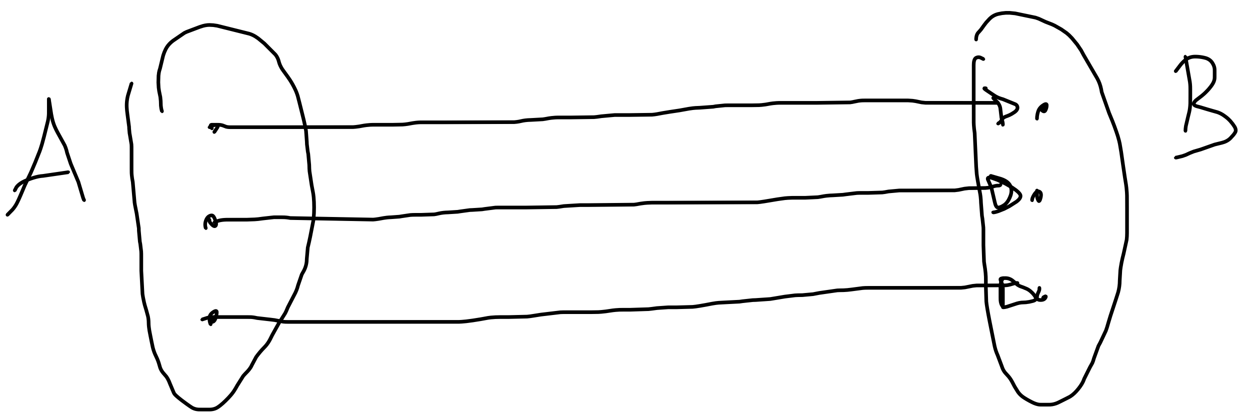
Oss: $f: A \to B$ è surgettiva se e solo se $\mathrm{Imm}(f) = B$.

Es: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$

è surgettiva



Def: $f : A \to B$ si dice che f è bigettiva (biunivoca, invertibile) se f è sia iniettiva che surgettiva.



Se una funzione è bigettiva
posso costruire la funzione inversa
che indico con f^{-1}.

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

dato $b \in B$ esiste almeno un elemento
$a \in A$: $f(a) = b$ (perché f è surgettiva).
L'elemento a è unico perché f è iniettiva.
Quindi poniamo $f^{-1}(b) = a$ se e solo se
$f(a) = b$.

Es: $f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ $f(x) = x^2$

f è bigettiva e la sua inversa è la radice quadrata.

$f(x) = x^2$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$.

La radice quadrata è la funzione inversa di $f(x) = x^2$ quando dominio e codominio sono $[0,+\infty)$

$\sqrt{y}$ è sempre un numero ≥ 0.

$\sqrt{4} = 2$.

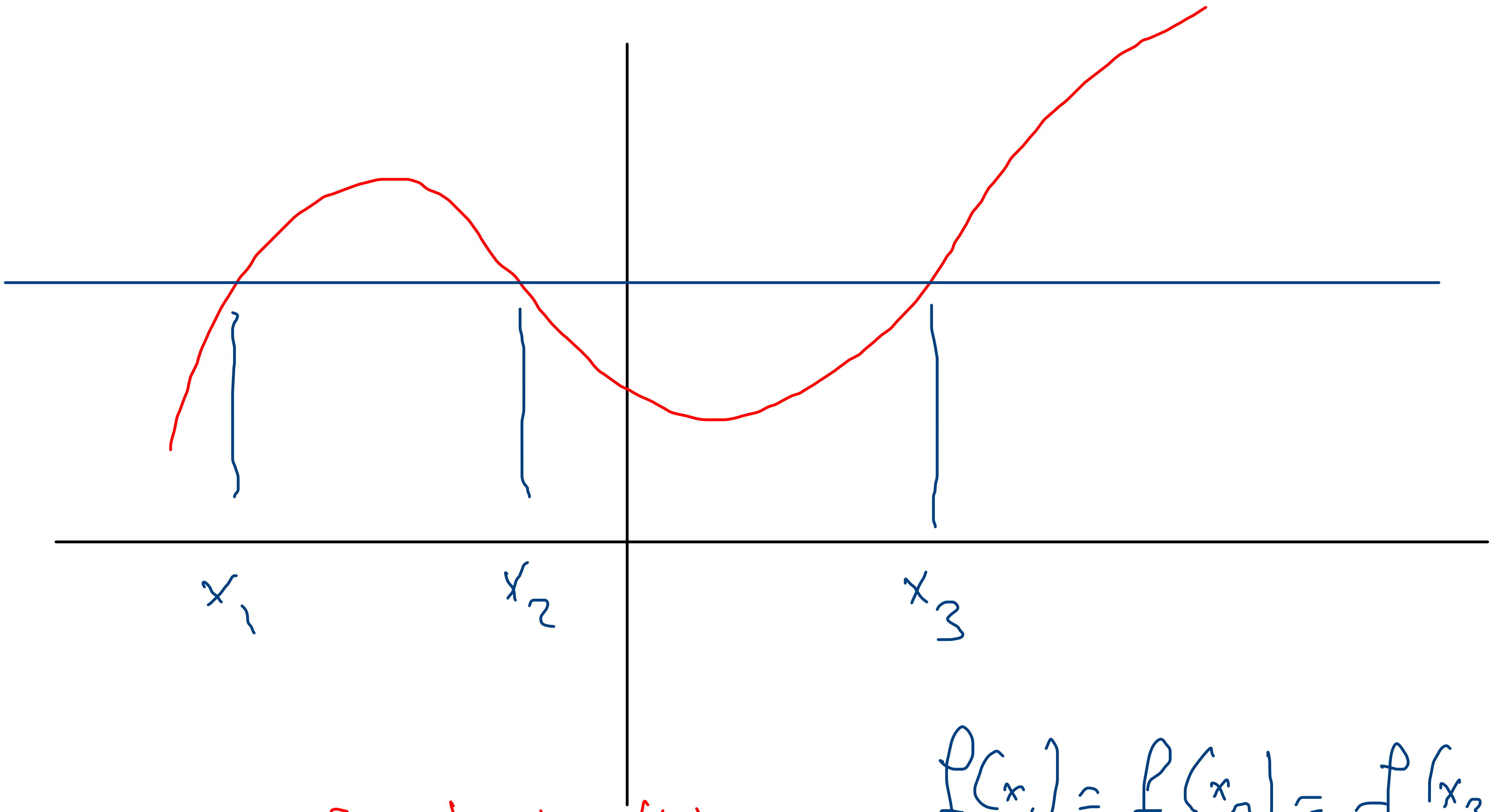
$x^2 = 4$ ha due soluzioni che sono

$x = 2$ e $x = -2$ ma $\sqrt{4} = 2$.

<u>Oss</u>: $\sqrt{x^2} = |x|$

$x = -2$ $\quad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\quad x \neq 2$

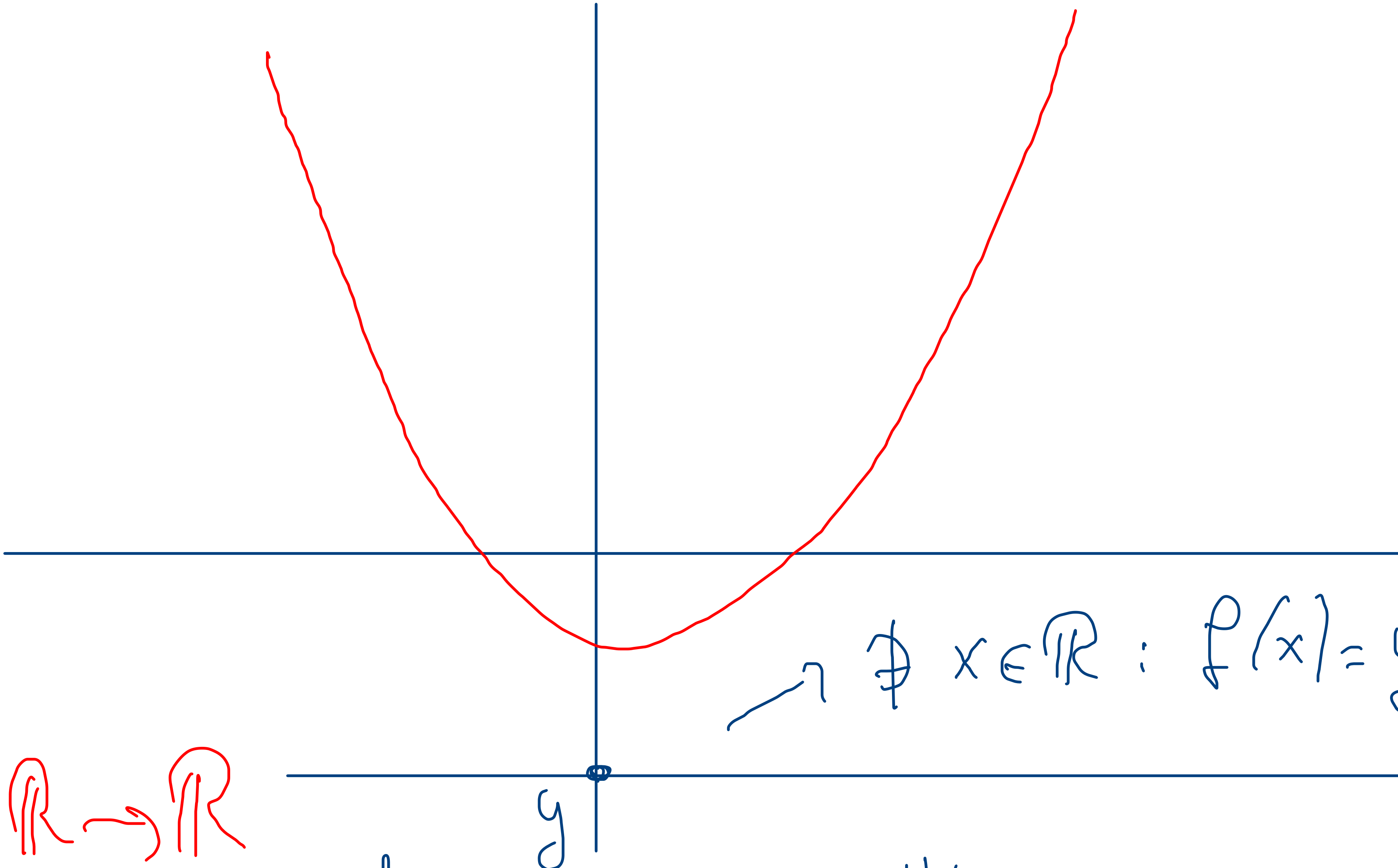
$|x| = 2$.



$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

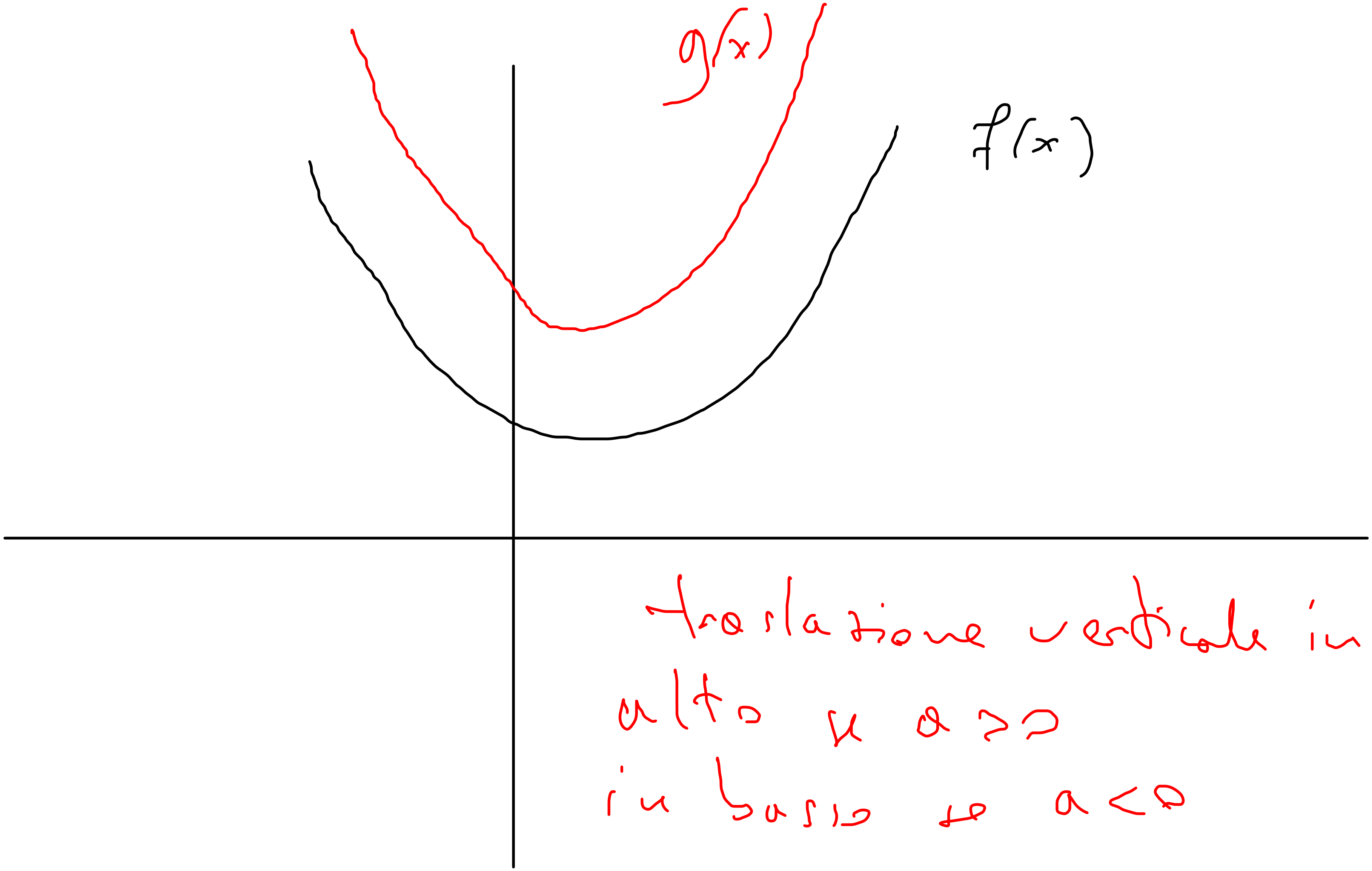
non è iniettiva

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = y .$

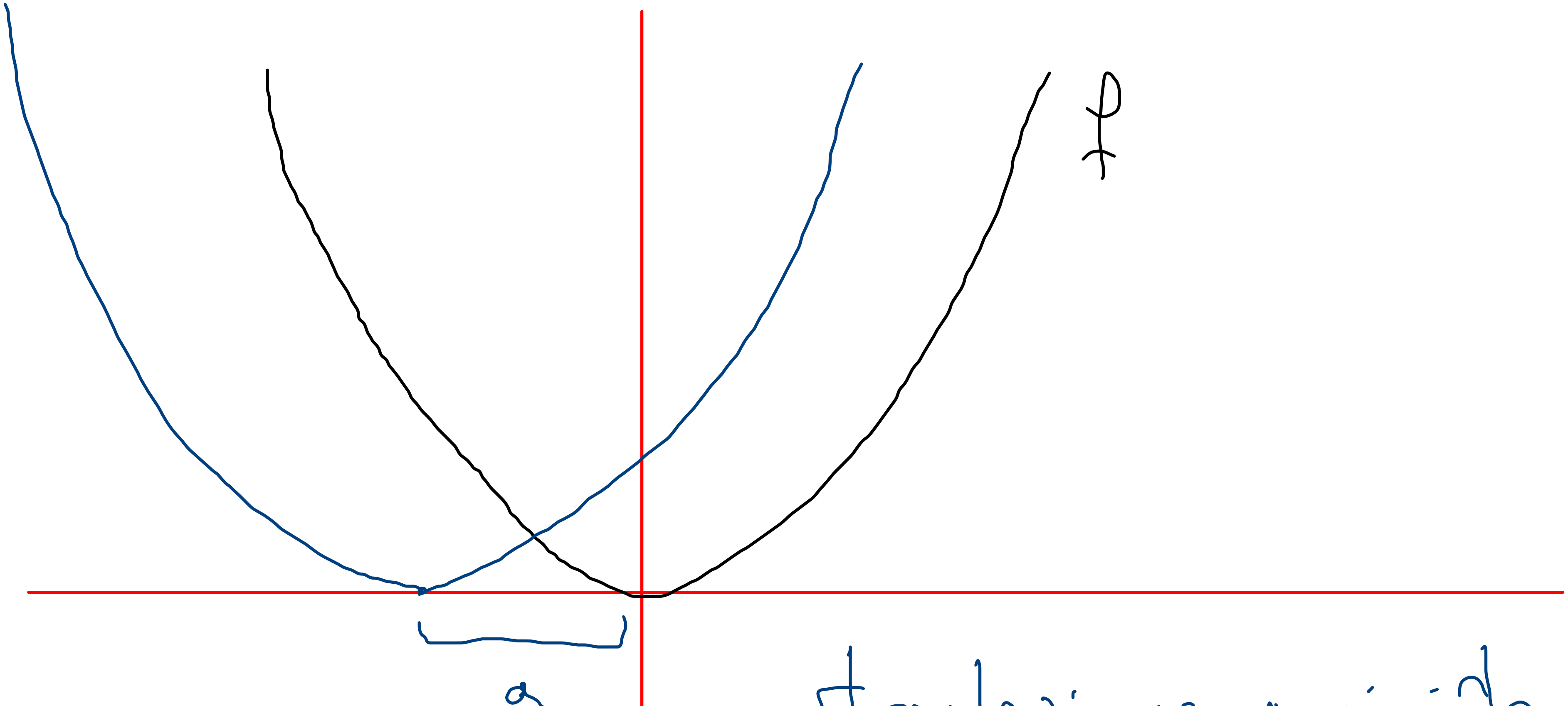
f non è surgettiva.



traslazione verticale in alto se $a>0$

in basso se $a<0$

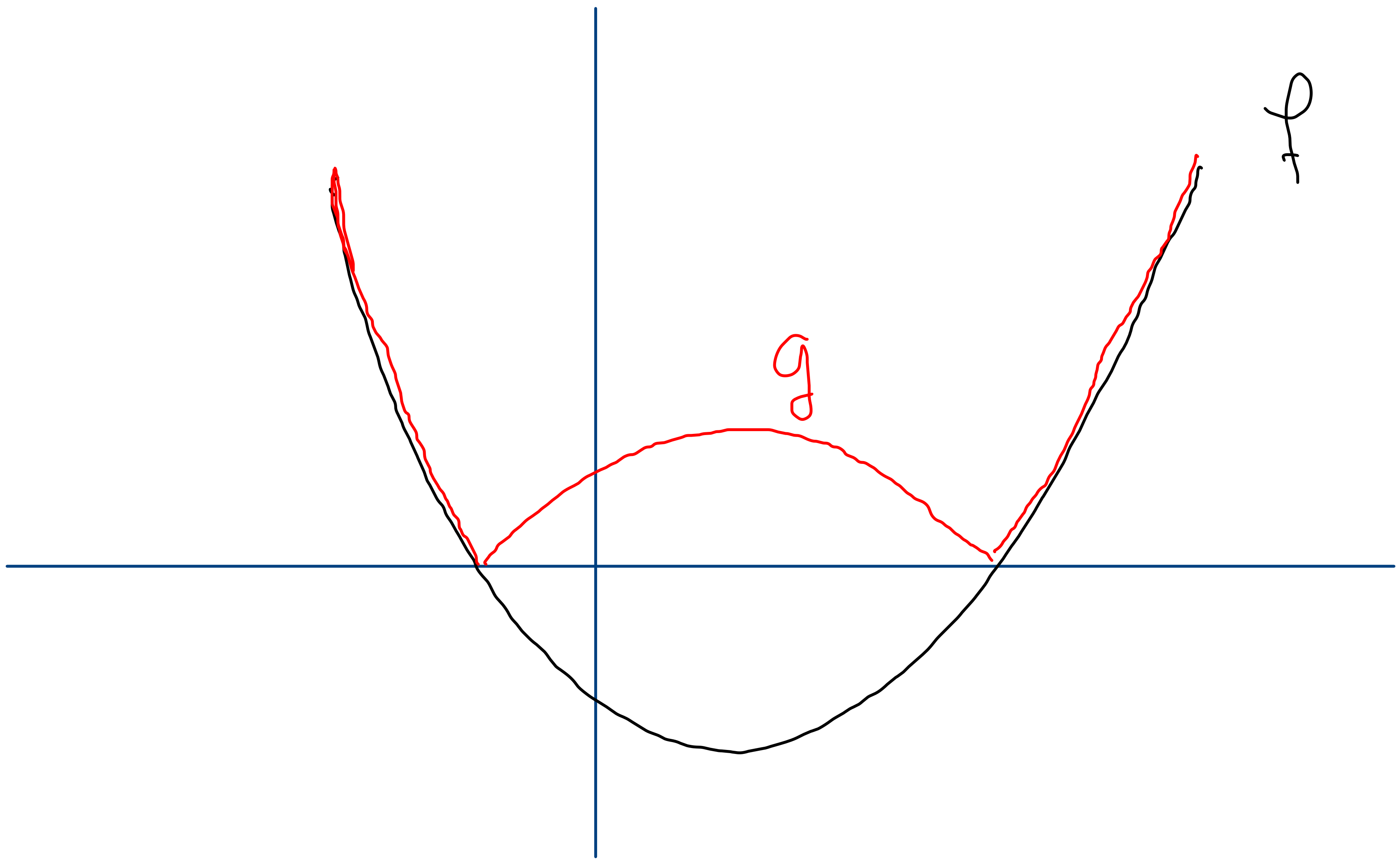
$g(x) = f(x) + a$ $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$



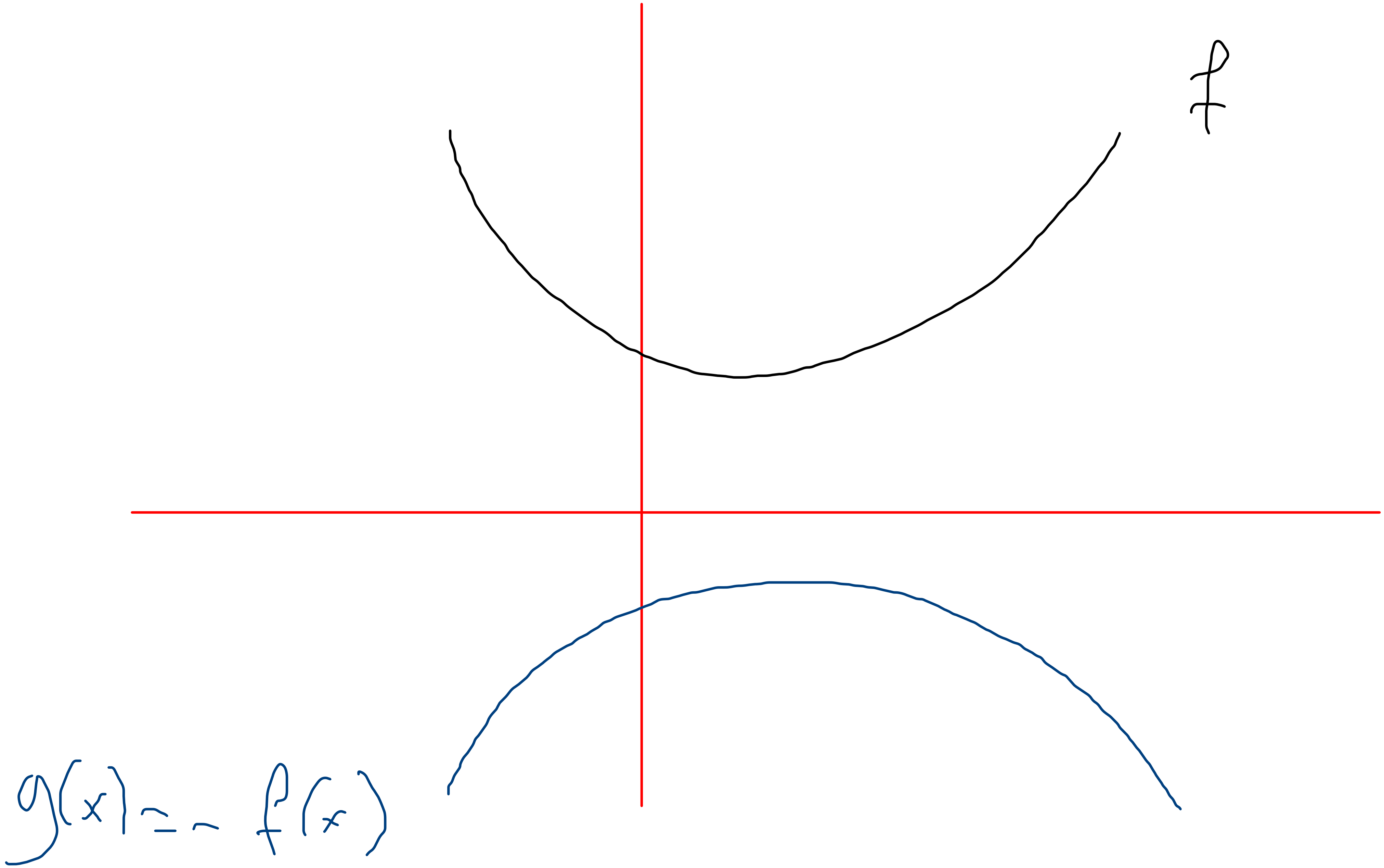
traslazione a sinistra
se $a > 0$ a destra
se $a < 0$

$a > 0$

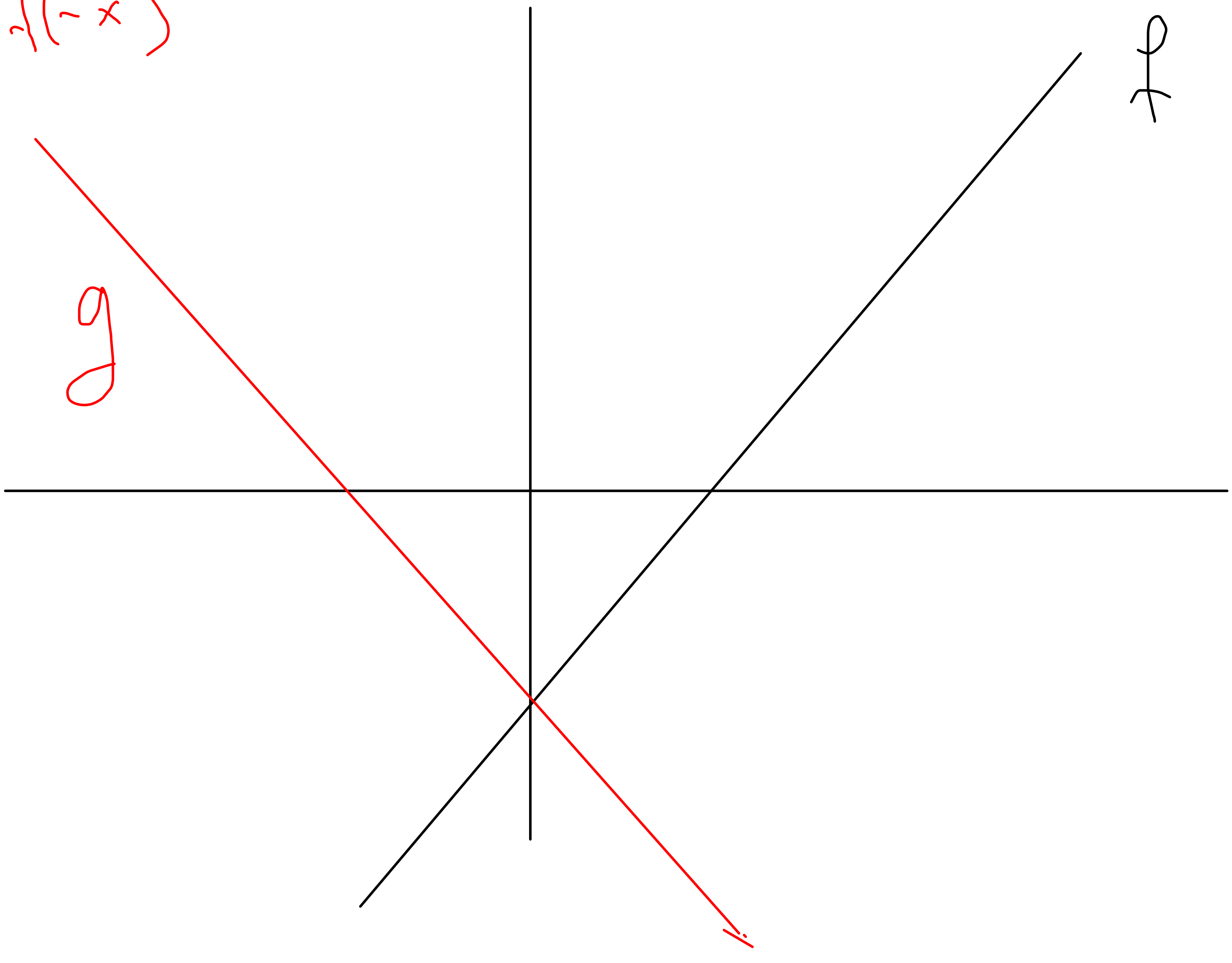
$$g(x) = f(x+a)$$



$$g(x) = |f(x)|$$


f
g(x) = - f(x)

$g(x) = f(-x)$



$g(x) = -f(-x)$