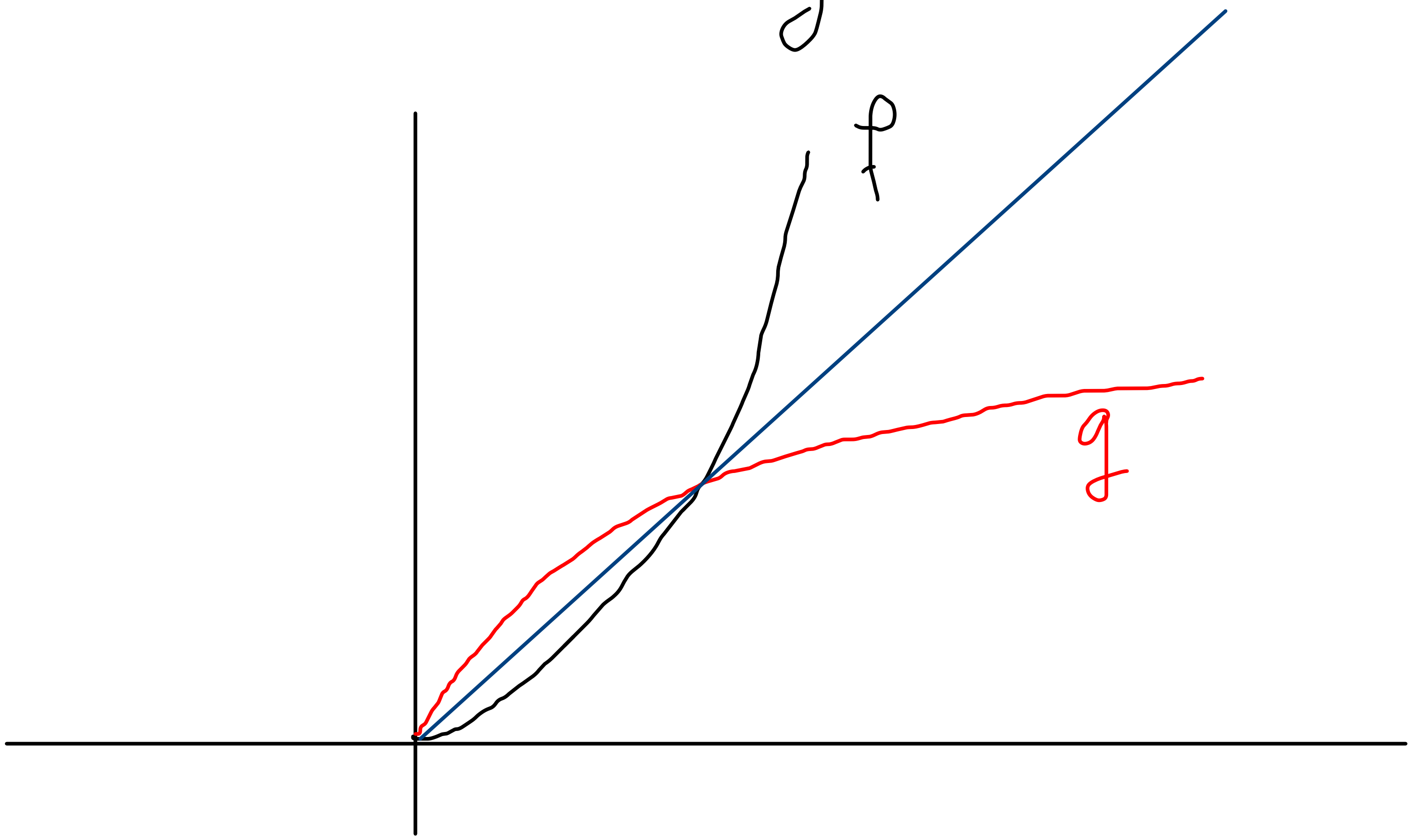
Oss: Se $f$ è una funzione invertibile i grafici di $f$ e di $f^{-1}$ sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

$f(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{x}$



# Funzioni monotòne

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$

Se $\forall x_1, x_2$ risulta che

1) $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ si dice strettamente crescente

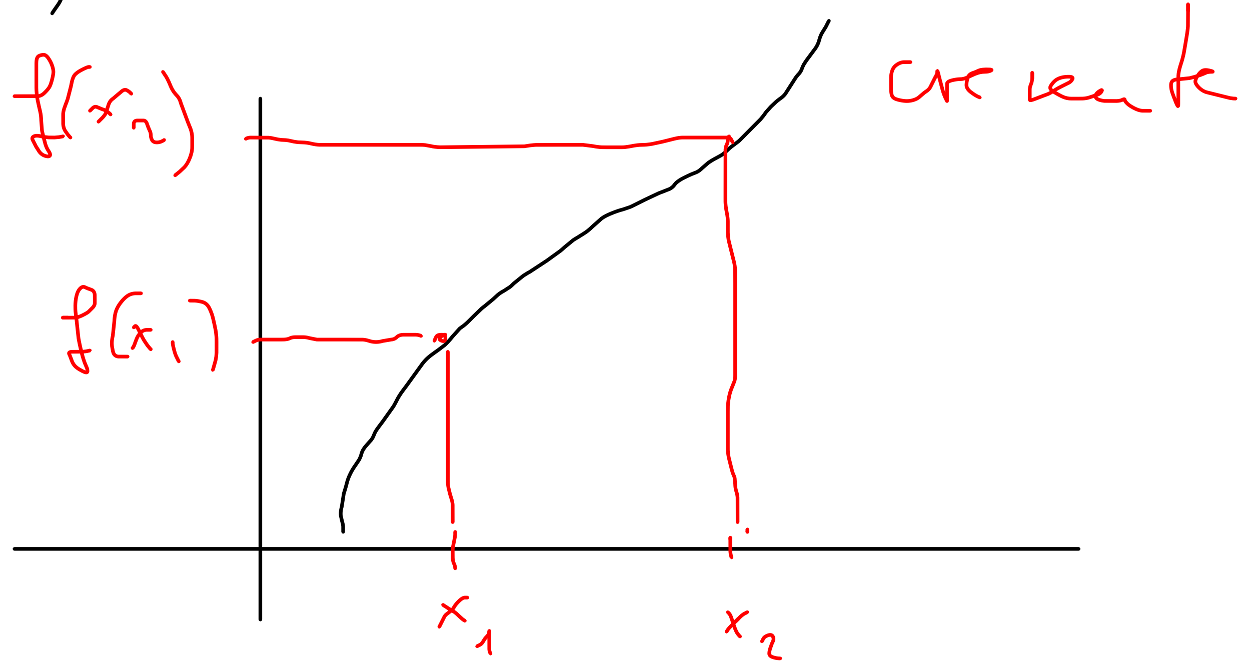
2) $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f$ si dice debolmente cresente

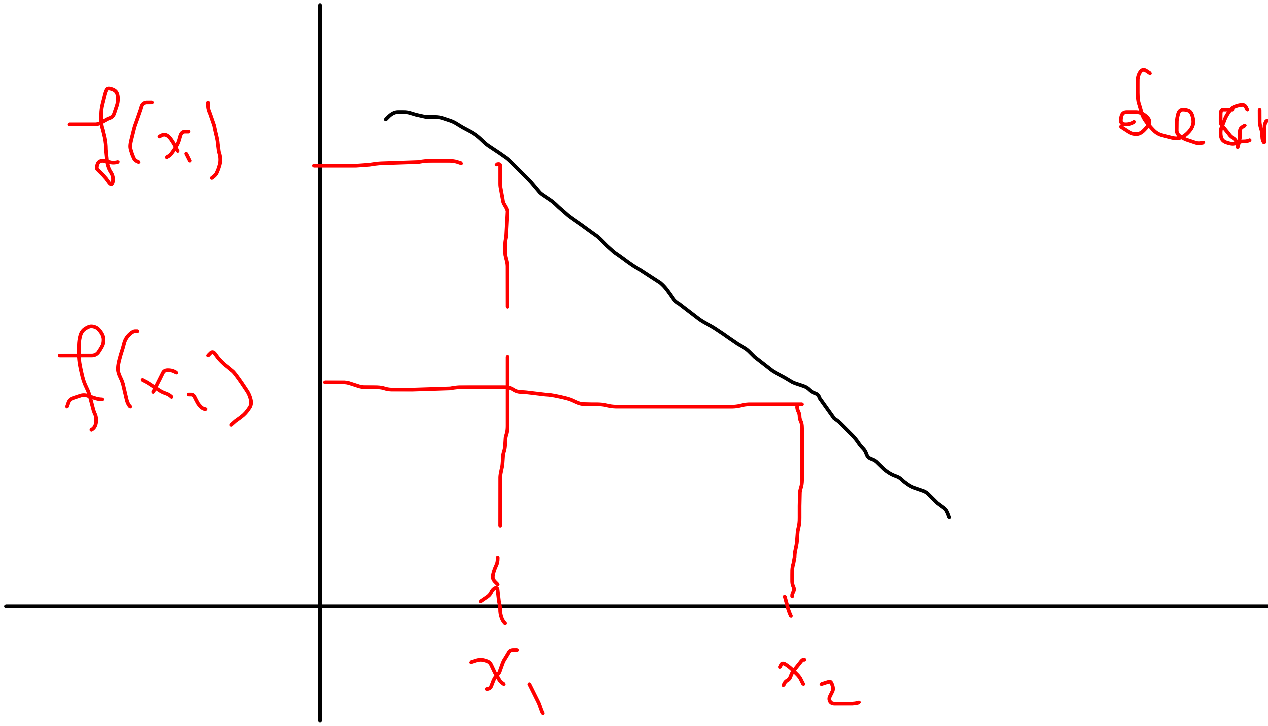
3) $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ si dice strettamente decresente

4) $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f$ si dice debolmente decrescente.

Se si verificano 1) o 3) $f$ si dice strettamente monotona

Se valgono 2) o 4) $f$ si dice debolmente monotona.






decrescente.

Se $f$ è crescente allora mantiene l'ordinamento

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Se $f$ è decrescente allora inverte l'ordinamento.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Oss: $f$ è strettamente crescente

se e solo se

concordi

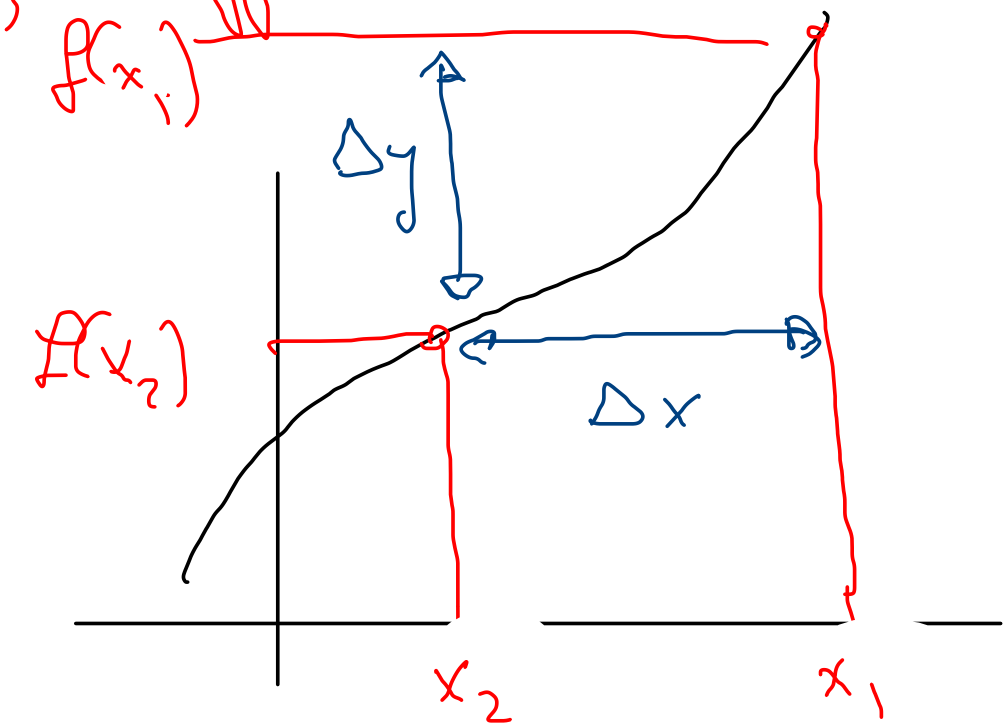
in segno

$$\boxed{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}} > 0$$

rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$x_1 \neq x_2$$



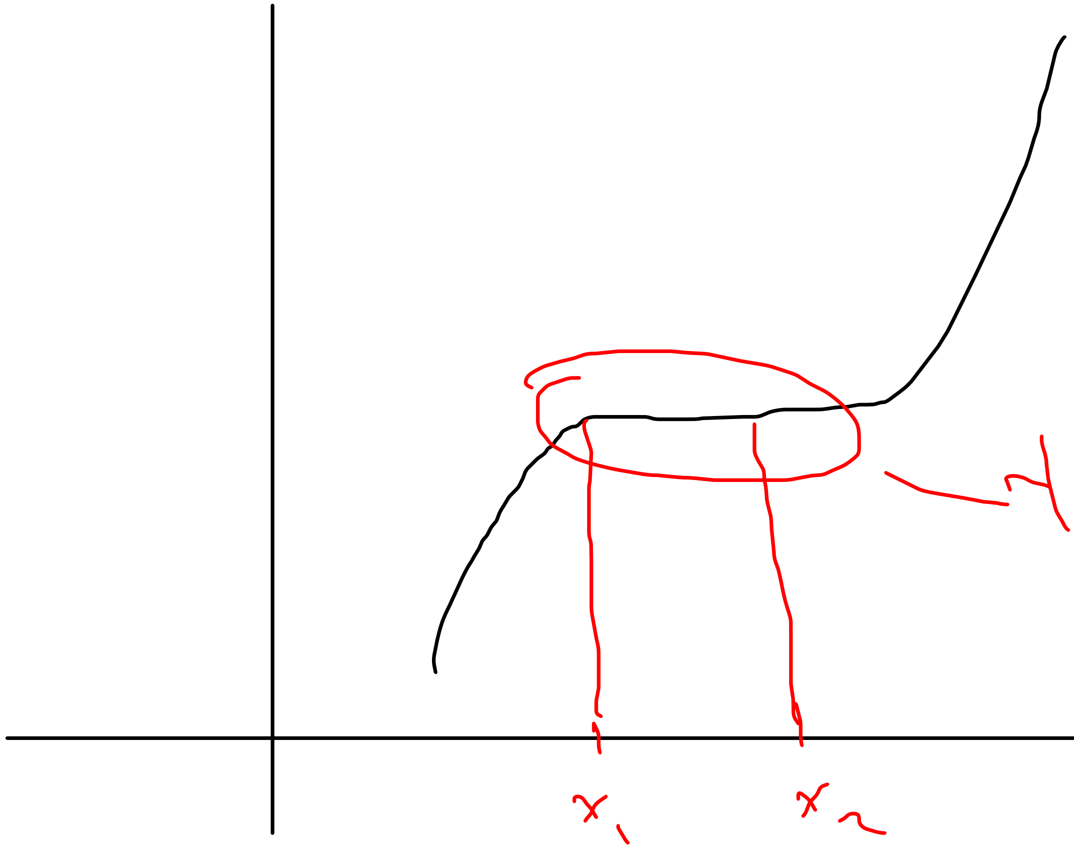
$f$ è strettamente decrescente se

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

num e denominatore sono discordi in segno.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \quad \text{debolmente crescente}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \quad \text{debolm. decresente.}$$



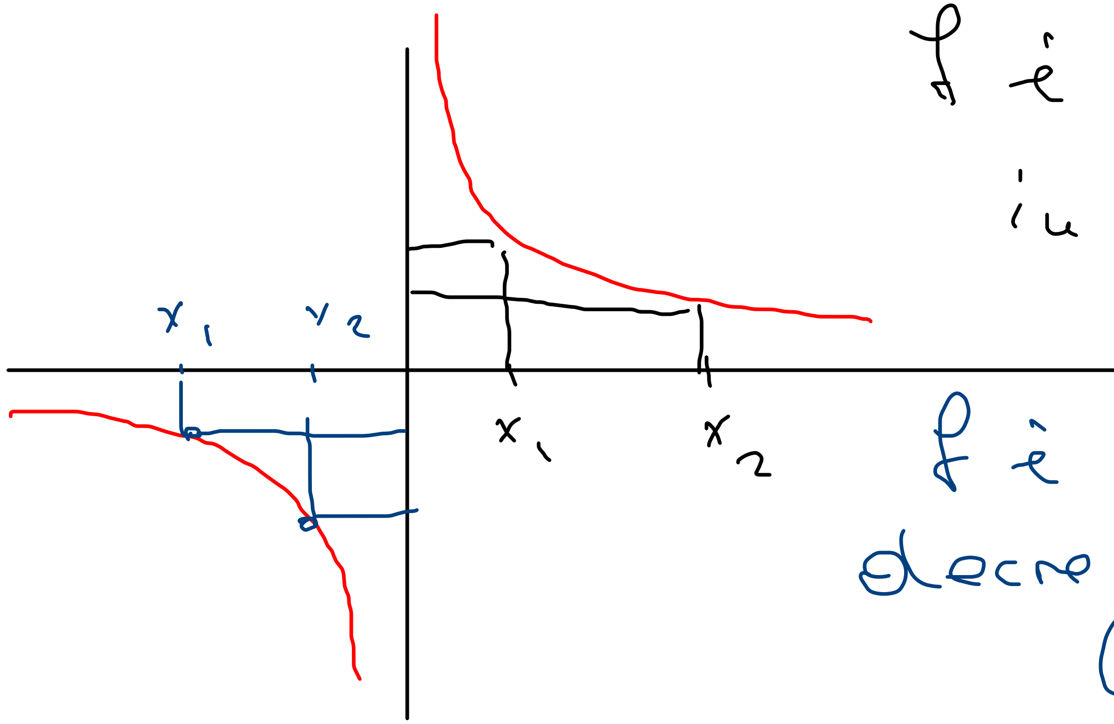

è debolmente crescente e non strettamente crescente.

tratto orizzontale.

$f(x_1) = f(x_2)$.

Oss. Se $f$ è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente.

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

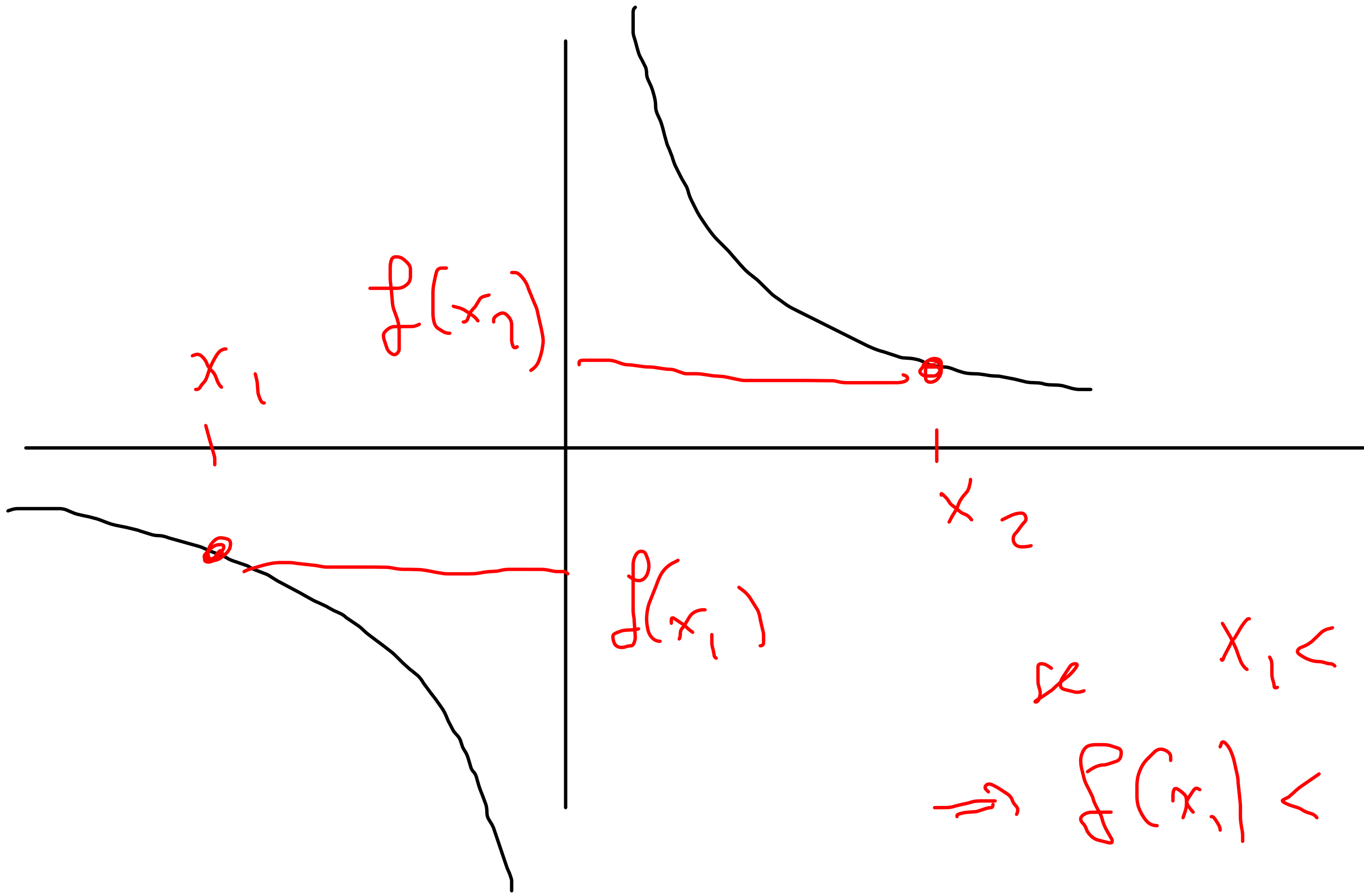



$f$ è strett. decresc. in $(0, +\infty)$

$f$ è strettam. decrescente in $(-\infty, 0)$

cioè se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.




se $x_1 < 0 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

ma $f$ non è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

---

Composizione di funzioni monotone

Prop: $A, B, C \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to B$, $g: B \to C$

Allora

1) Se $f$ è cresente e $g$ è cresente allora $g \circ f$ è cresente

2) Se $f$ è cresente e $g$ è decresente allora $g \circ f$ è decrescente. (e viceversa)

3) Se $f$ è decresente e $g$ è decresente allora $g \circ f$ è cresente.

Es: $h(x) = e^{x^3}$ si ottiene per composizione

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g(t)=e^{t}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x^3 \arrow[r, mapsto, "g"] & e^{x^3} \end{tikzcd}$$

$$h(x)=e^{x^3}=e^{f(x)}=g(f(x))=(g\circ f)(x)$$

$f$ è strett. crescente, $g$ è strett. crescente

$\Rightarrow$ $h$ è strett. crescente.

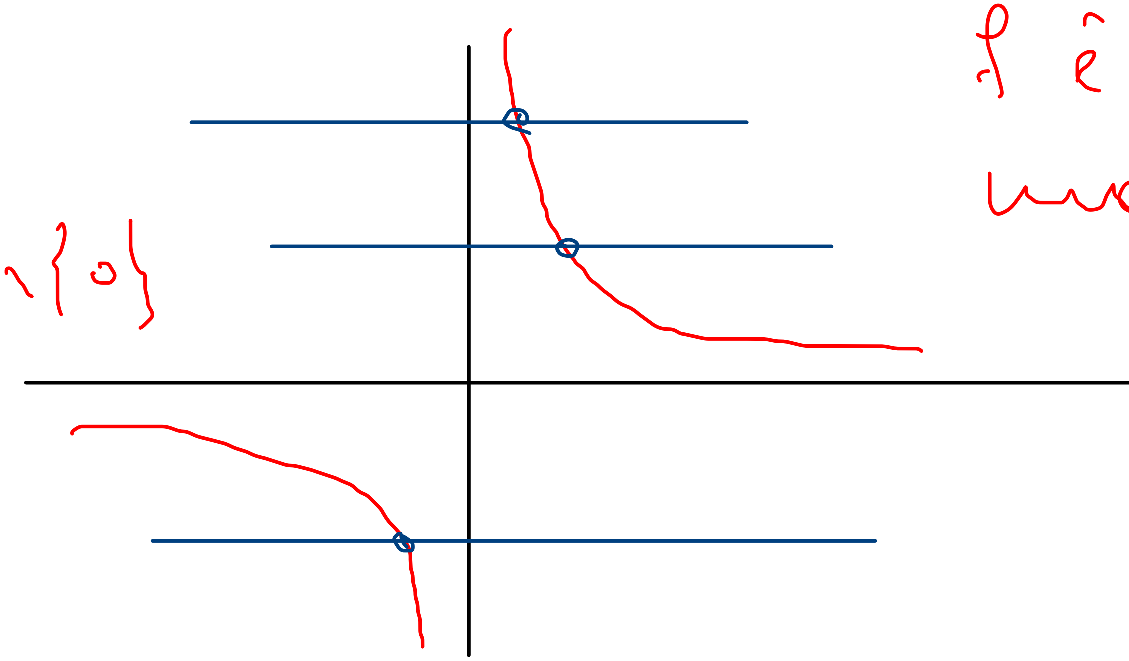
Oss: Se $f$ è strettamente monotòna allora $f$ è iniettiva.

Il viceversa è sempre vero?

Se $f$ è iniettiva $\Rightarrow$ $f$ è monotòna? NO

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f$ è iniettiva ma non è monotona.

Def: L'insieme di definizione (o dominio naturale) di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso scrivere la funzione.

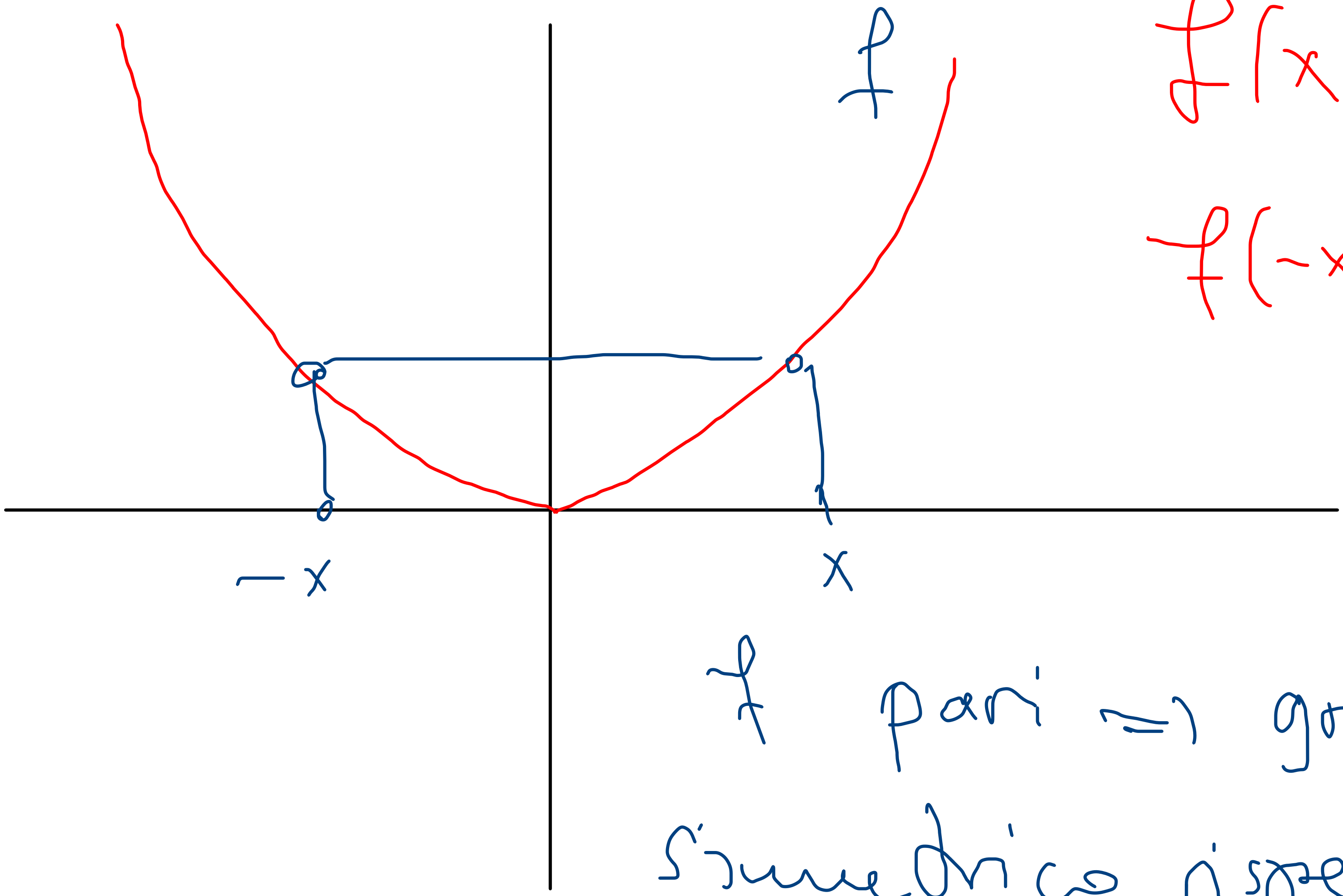
Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ dominio di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def: Se $f(x) = f(-x)$ $\forall x$ nel dominio di $f$ $\Rightarrow$ $f$ si dice pari

Se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x$ nel dominio di $f$ $\Rightarrow$ $f$ si dice dispari.

Oss: il dominio di $f$ deve essere tale che se $x \in$ dominio $\Rightarrow$ $-x \in$ dominio.

Cioè è simmetrico rispetto allo $0$.




$f(x) = x^2$

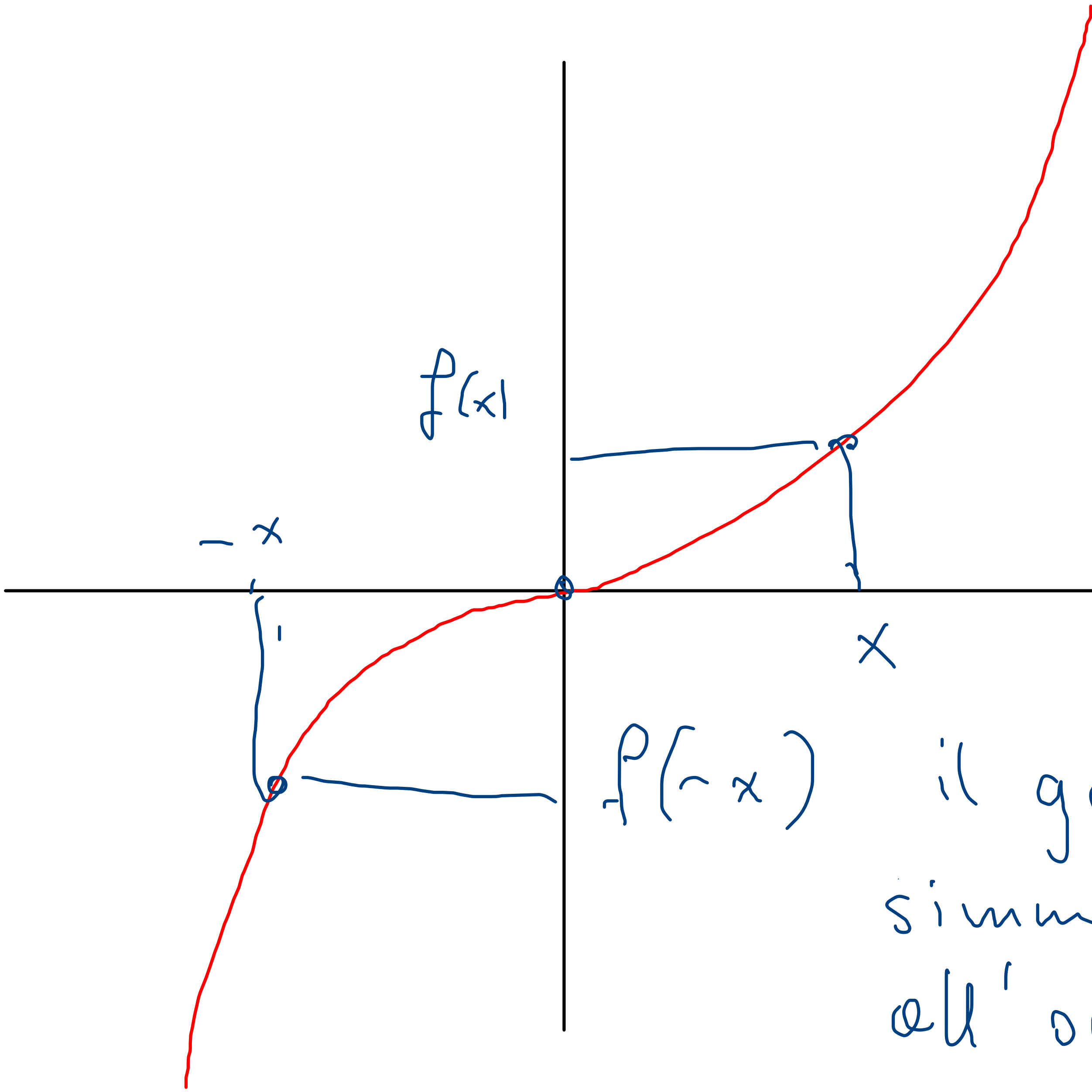
$f(-x) = (-x)^2 = x^2$
$= f(x)$

$f$ pari $\Rightarrow$ graph$(f)$ simmetrico rispetto all'asse $y$.

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 =$$

$$= -x^3 = -f(x)$$



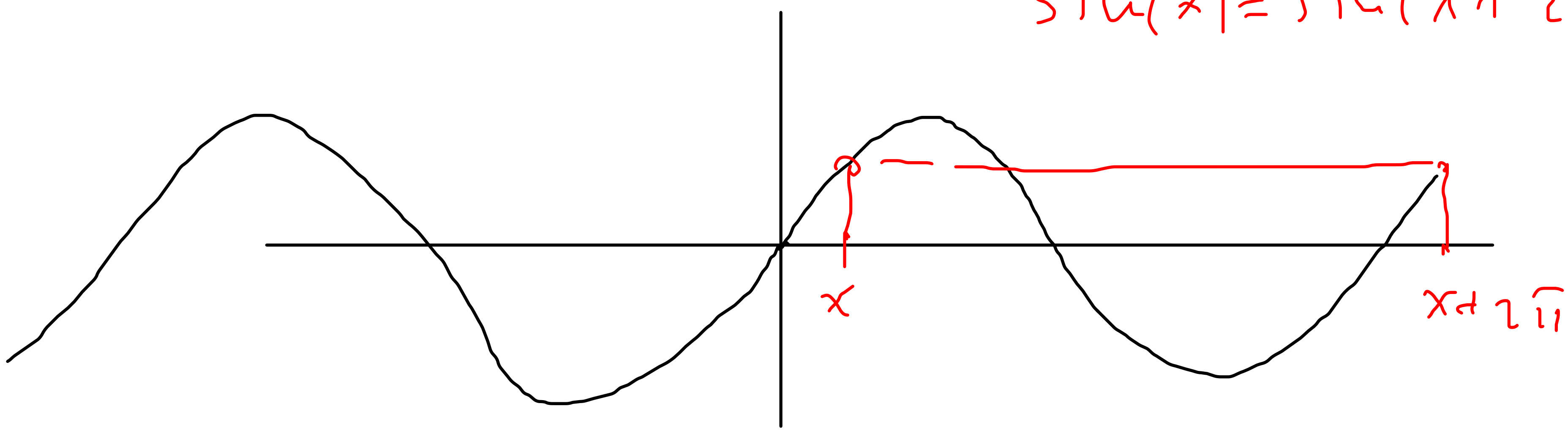

se $f$ è dispari il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

**Def**: $f$ si dice periodica di periodo $P \in \mathbb{R}$ se $\forall x$ $f(x+P) = f(x)$.

**Oss**: il dominio di $f$ deve essere tale che $x \in$ dominio $\Rightarrow x+P \in$ dominio.

**Es**:

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.



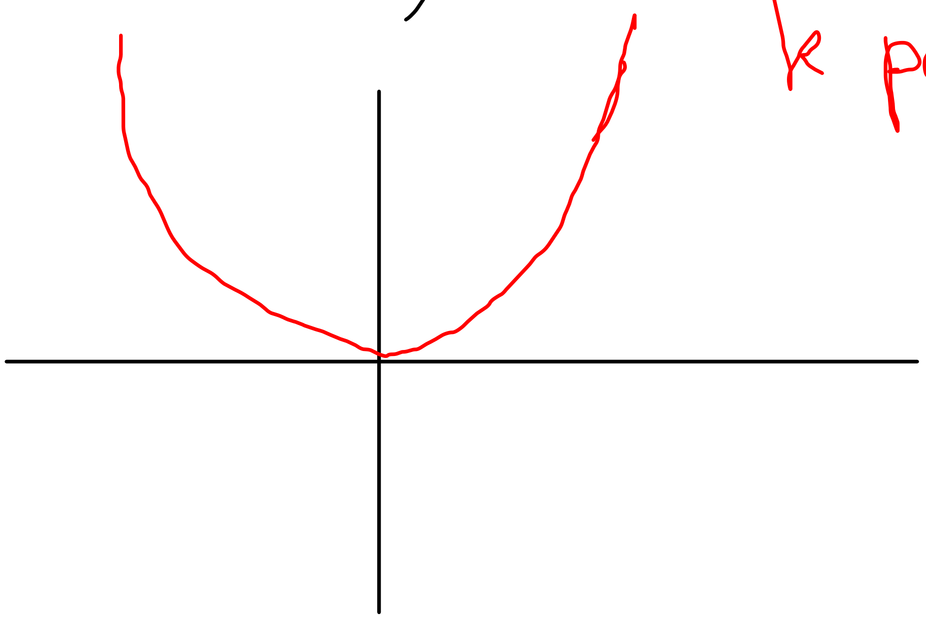
# Funzioni elementari

$f(x) = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$ retta

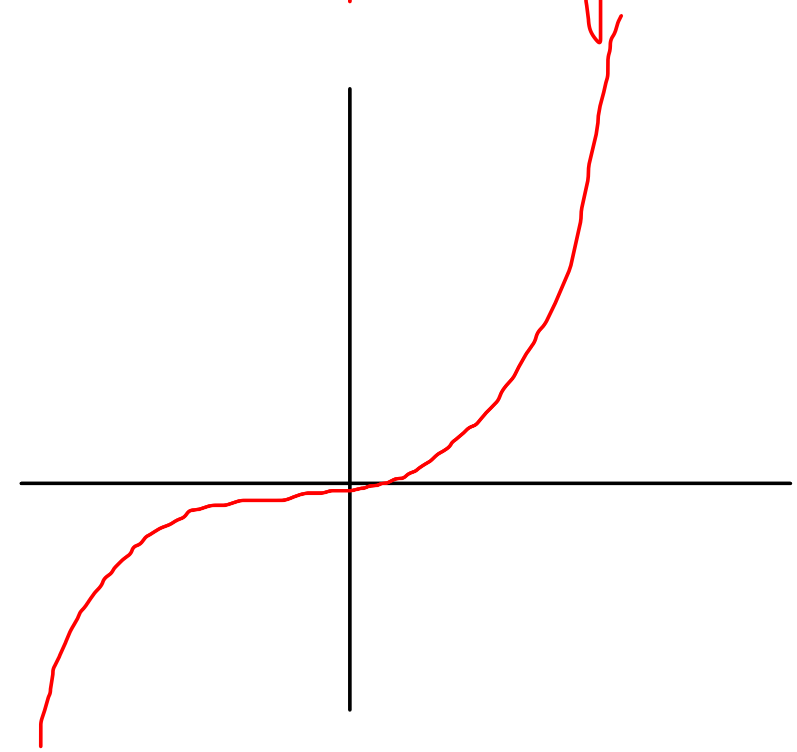
$a$ = coeff. angolare $\qquad b$ = termine noto

$f(x) = x^k \,, \quad k \in \mathbb{N}$

$k$ pari



$k$ dispari

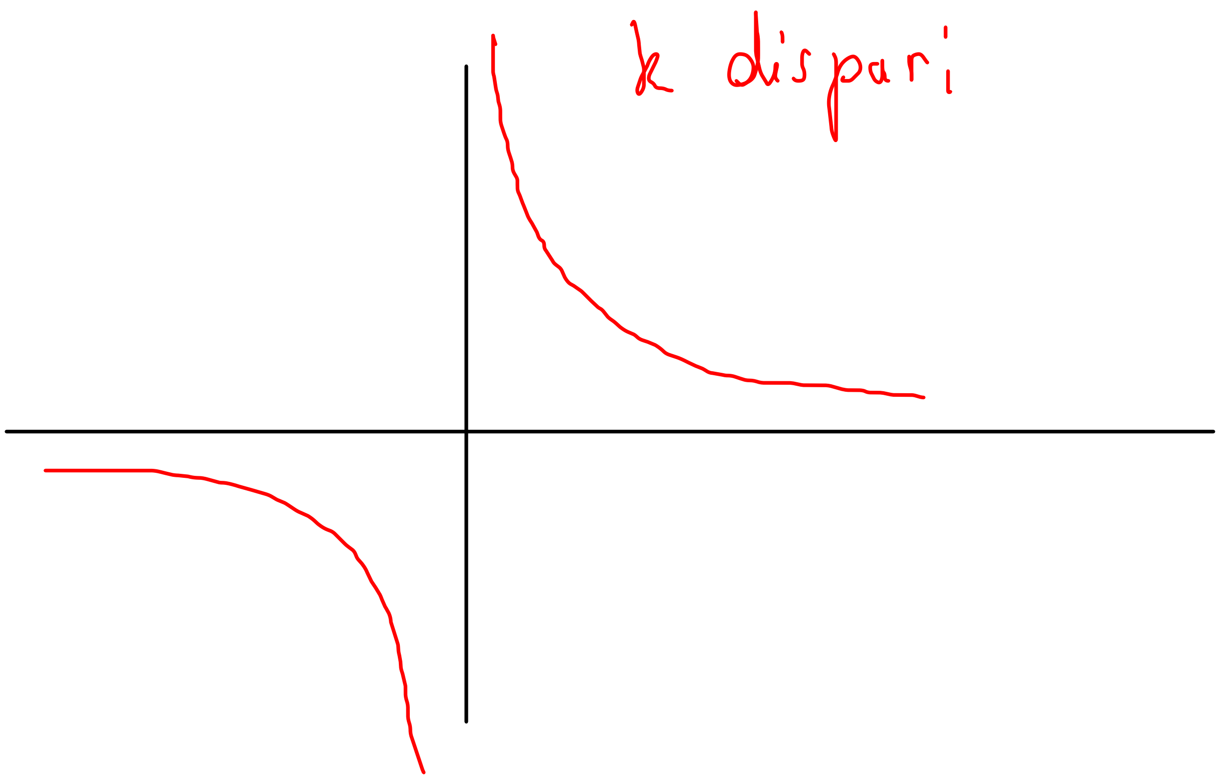


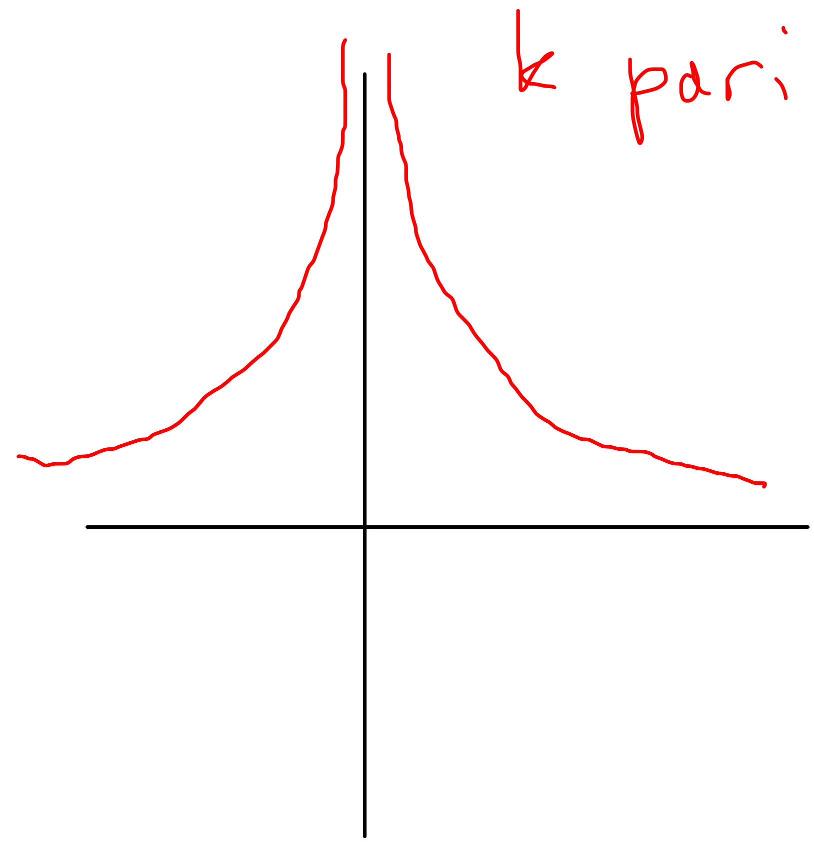
$f(x) = x^k$ è una funzione pari se $k$ è pari

dispari se $k$ è dispari

---

$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{Z} \quad k < 0$



$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ $\quad p, q \in \mathbb{N} \quad q \neq 0$

p e q non entrambi pari

dominio naturale di f?

$x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$ (inversa della funzione $g(x) = x^q$)

se q è pari $\Rightarrow$ dominio è $x \geq 0$

se q è dispari $\Rightarrow$ dominio è $\mathbb{R}$.

perché se $q$ è dispari $g(x) = x^q$

è invertibile su $\mathbb{R}$

se $q$ è pari è invertibile solo come

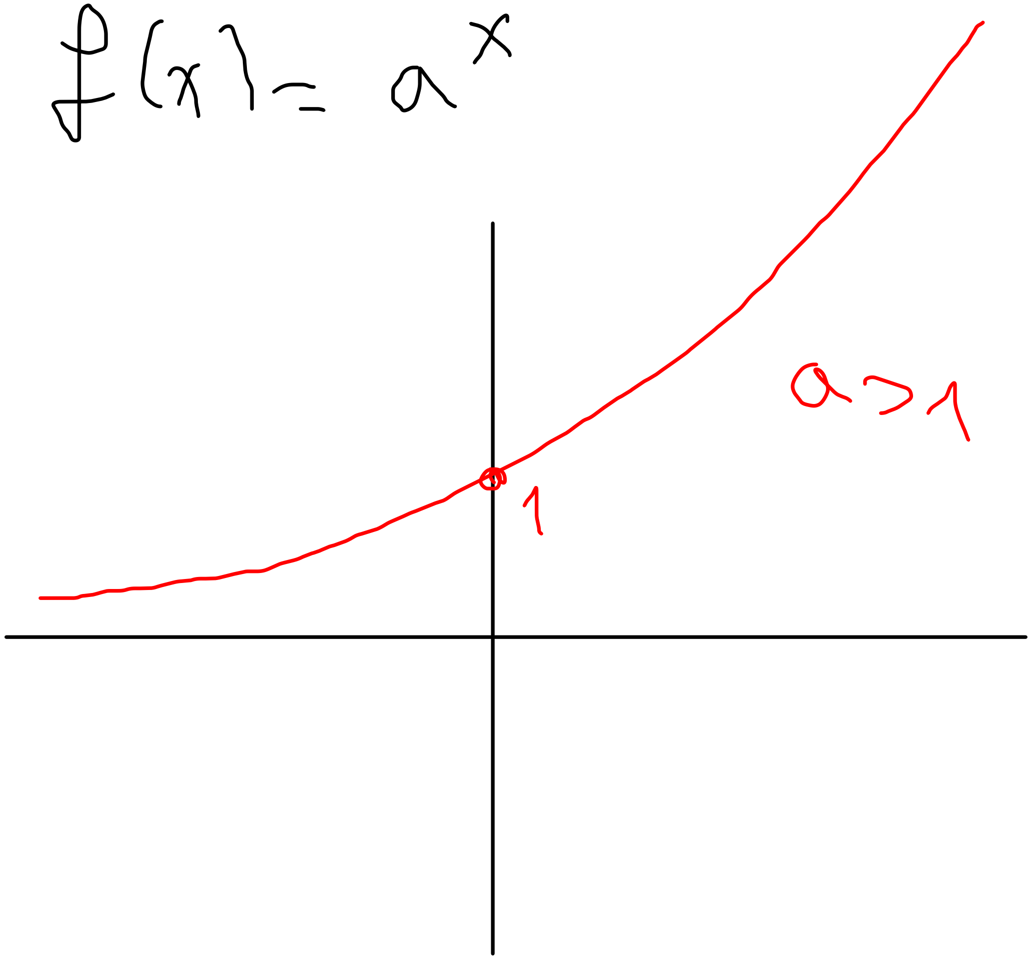
funzione $[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$.

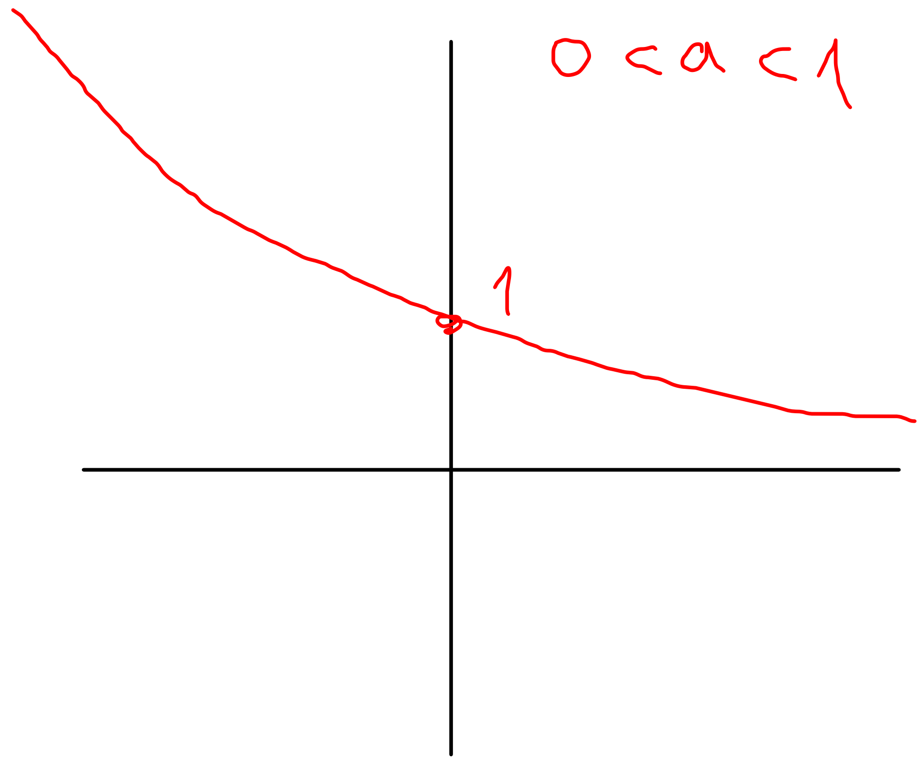
$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

# Funzione esponenziale

$a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

$f(x) = a^x$



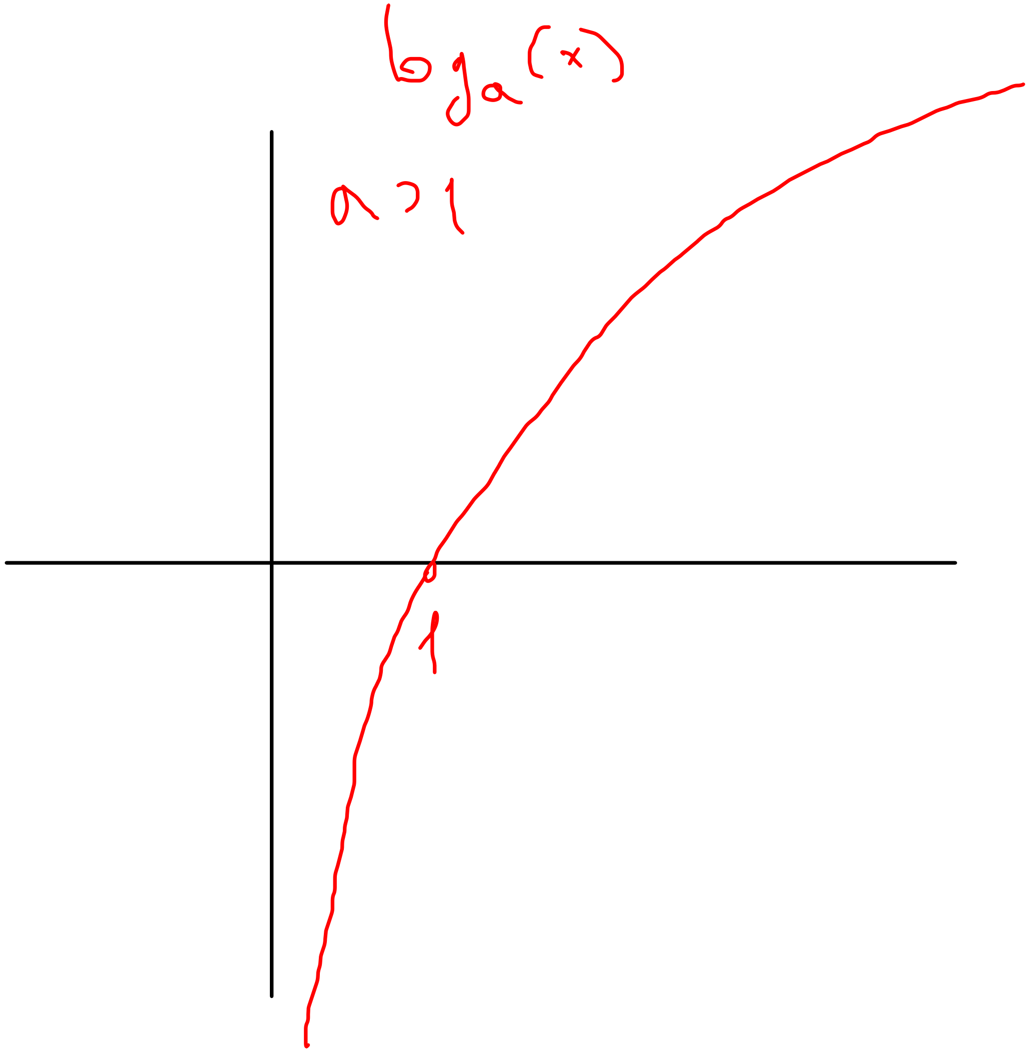



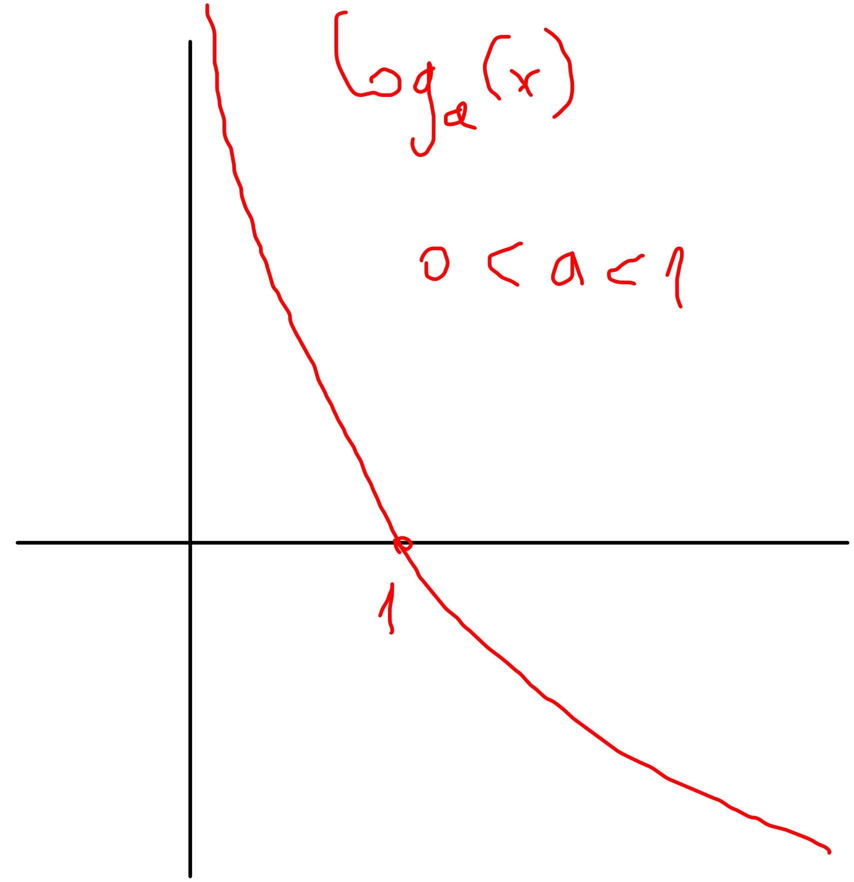
$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ è $\left\{ \begin{array}{l} \text{strett. crescente se } a > 1 \\ \text{strett. decrescente se } 0 < a < 1. \end{array} \right.$

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \quad f(x) = a^x$

è invertibile e la funzione inversa si chiama logaritmo in base $a$.




$$f(x) = \log_a(x)$$

$$\log_a(1) = 0$$

$f(x) = e^x$ $\boxed{a = e}$ $e = 2{,}71\ldots$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ è invertibile

e la sua inversa si chiama logaritmo naturale.

$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Invece di scrivere $\log_e$ scriveremo $\log$.

Si usa anche il simbolo ln ma noi

non lo useremo. Per noi $\log = \log_e$.

## Cambio di base nel logaritmo

$$\boxed{\log_a x = y} \iff a^y = x$$

facciamo il logaritmo naturale dell'identità

$$\log(a^y) = \log x \iff y \log a = \log x$$

ma $\boxed{y = \log_a x}$

$$\Rightarrow \log_a x \cdot \log a = \log x$$

$$\Rightarrow \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$f(x) = x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

cosa vuol dire $x^{\sqrt{2}}$ oppure $x^{\pi}$?

<u>Def</u>: $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ definita per $\boxed{x>0}$

coerenza della notazione

$$e^{\alpha \log x} = \left(e^{\log x}\right)^\alpha = x^\alpha$$

dominio naturale di $f(x) = x^\alpha$

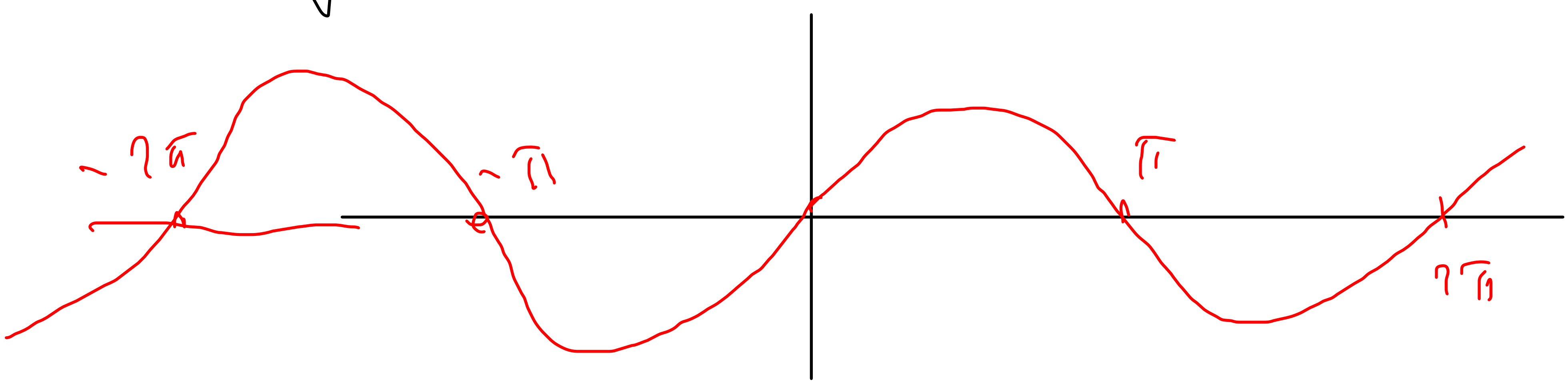
è $(0, +\infty)$.

$f(x) = \sin x$ $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$

perché $\qquad -1 \leq \sin x \leq 1$.

$f$ è surgettiva se per codominio prendo $[-1, 1]$.

$f$ è periodica di periodo $2\pi$

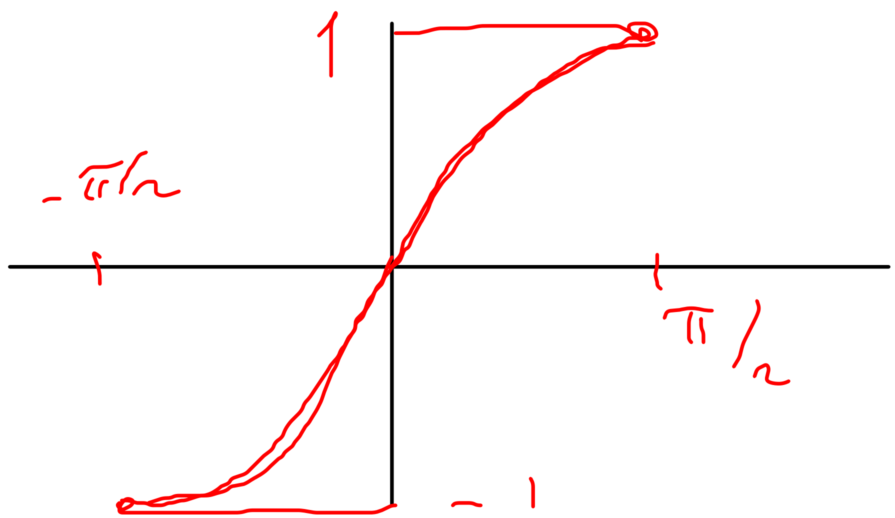


$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

La posso invertire modificando dominio e codominio?

$f(x) = \sin x \qquad f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

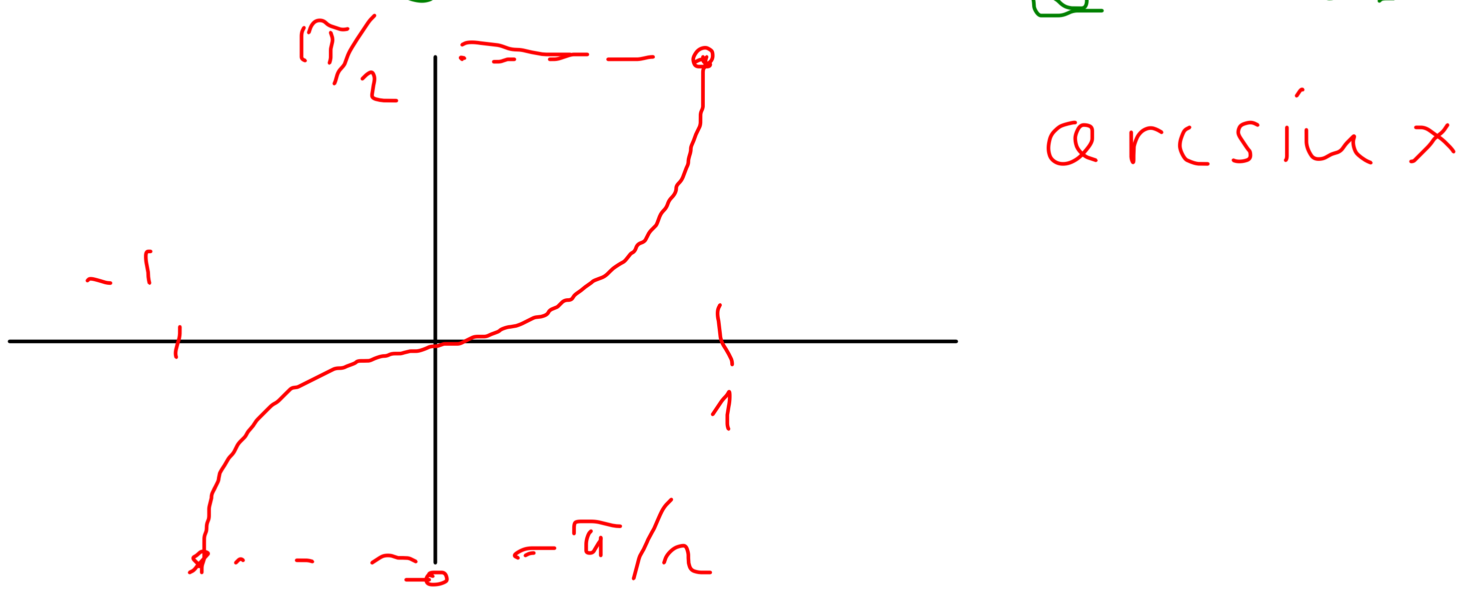
$f$ è strettamente crescente e surgettiva



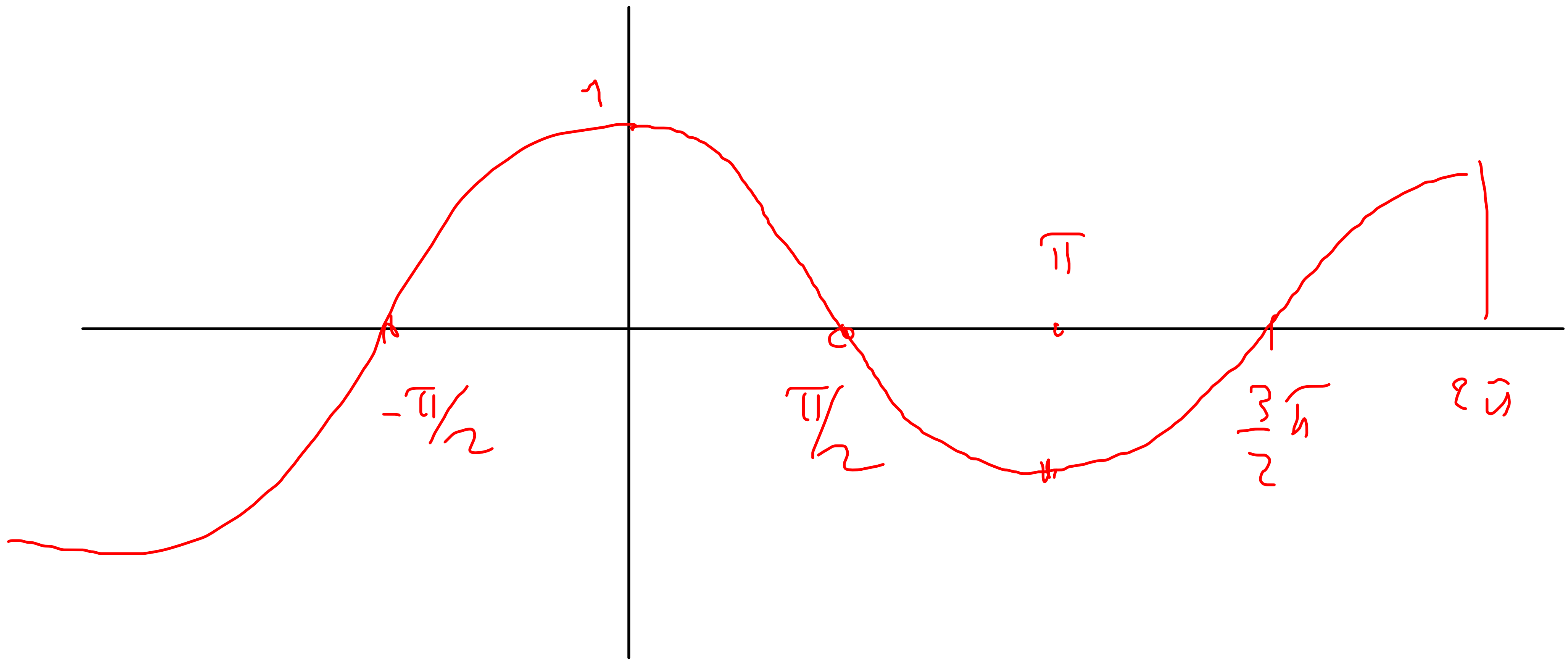
La sua inversa si chiama arcsin

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La funzione arcsin è l'inversa della funzione seno quando il dominio è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e il codominio è $[-1,1]$.



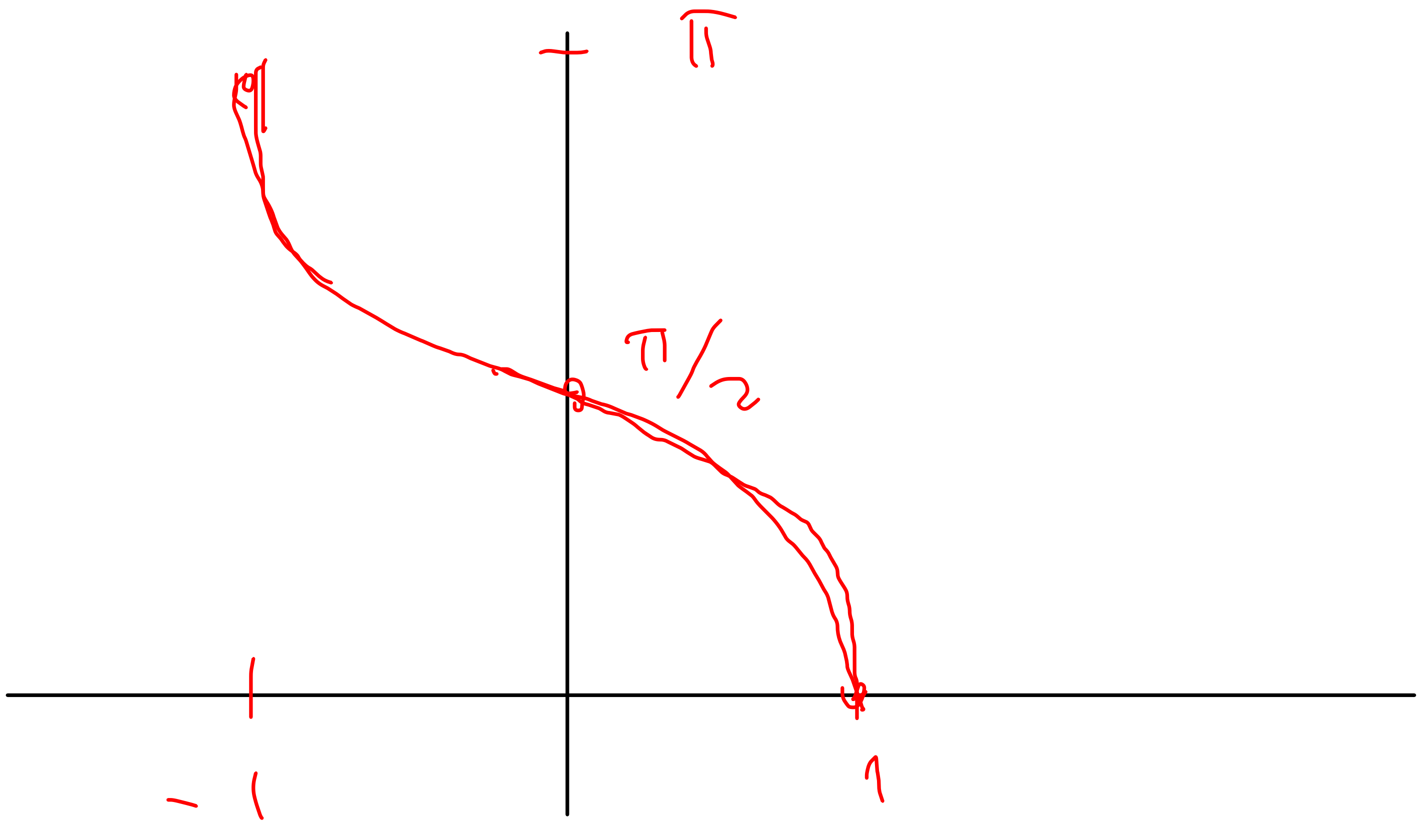
$f(x) = \cos x$ periodica di periodo $2\pi$



$\cos x : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ è invertibile

e la sua inversa si chiama arcocoseno

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$.

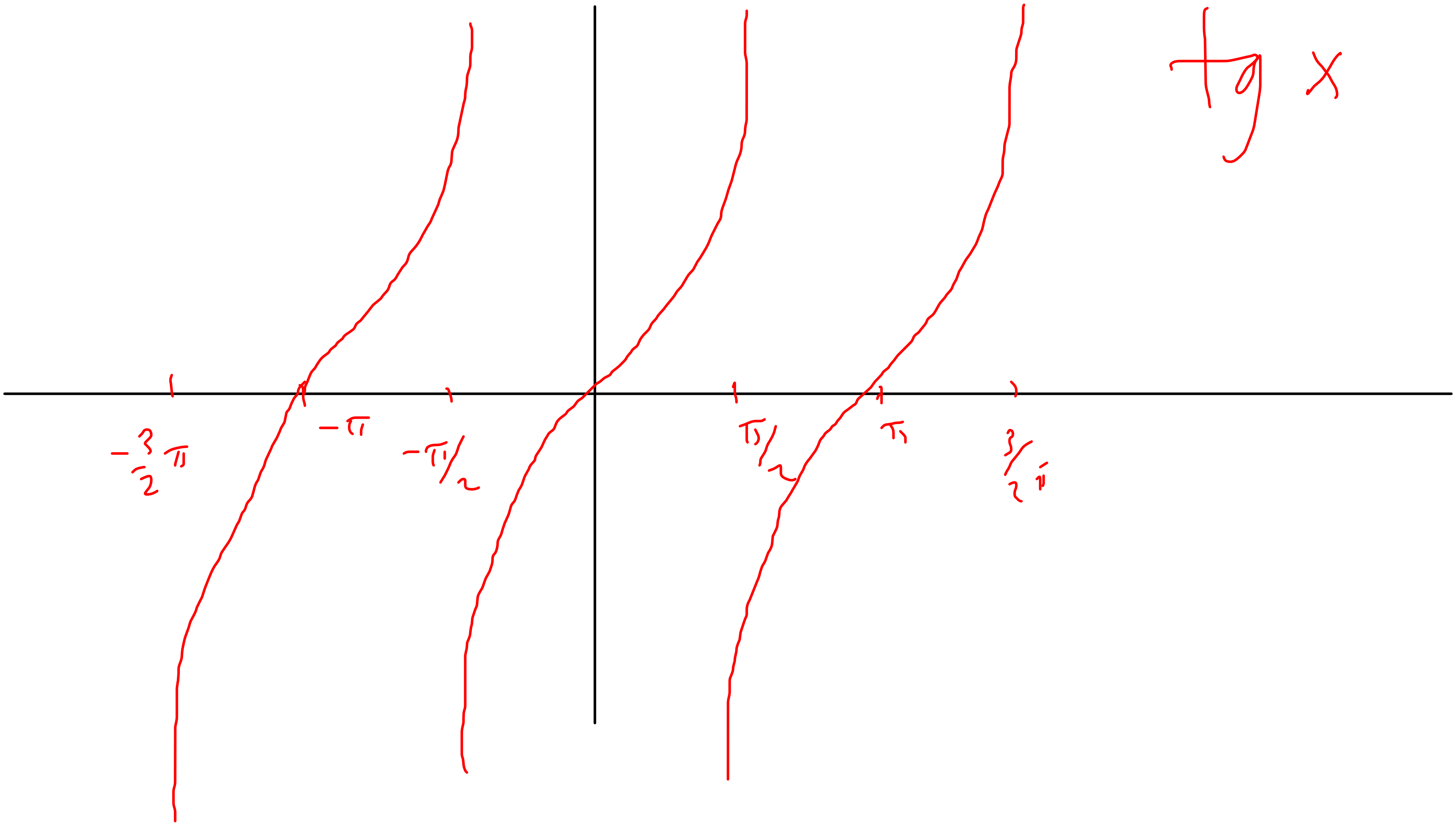


$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ non è definita se $\cos x = 0$

dominio $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

è fatto da infiniti intervalli disgiunti

è periodica di periodo $\pi$

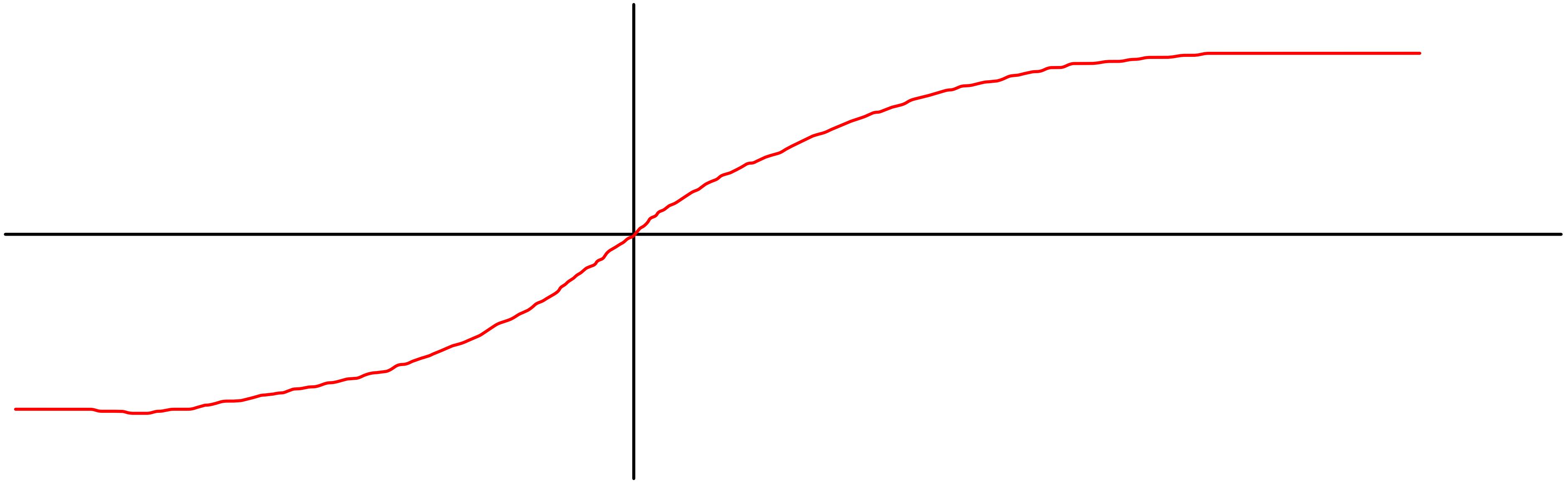

tg x
$-\frac{3}{2}\pi$
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
$\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

$f(x) = tg\, x$ $\quad f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è invertibile.

La sua inversa si chiama

arcotangente

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

è strett. crescente.

da non confondere con la cotangente $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\cot g x = \frac{1}{tg\, x}.$$

Oss: $\sin x$ e $\operatorname{tg} x$ sono dispari

$\cos x$ è pari