

Successioni

Definizione

Una funzione definita su una semiretta S di \mathbb{N}

$$f: S \rightarrow B \quad S = [m, +\infty) \cap \mathbb{N}$$

si dice successione a valori in B

Esempi

• $f(n) = n \quad S = \mathbb{N}$

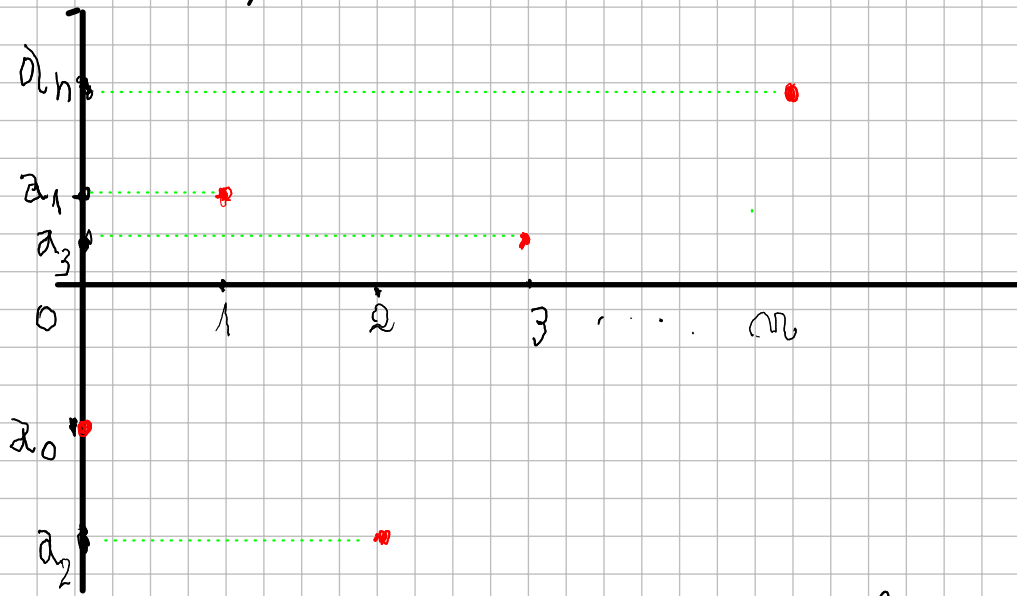
• $f(n) = \frac{1}{n} \quad S = \{x \in \mathbb{N} : x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

• $g(n) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad S = \mathbb{N}$

si noti che $(-1)^n = \cos(n\pi)$

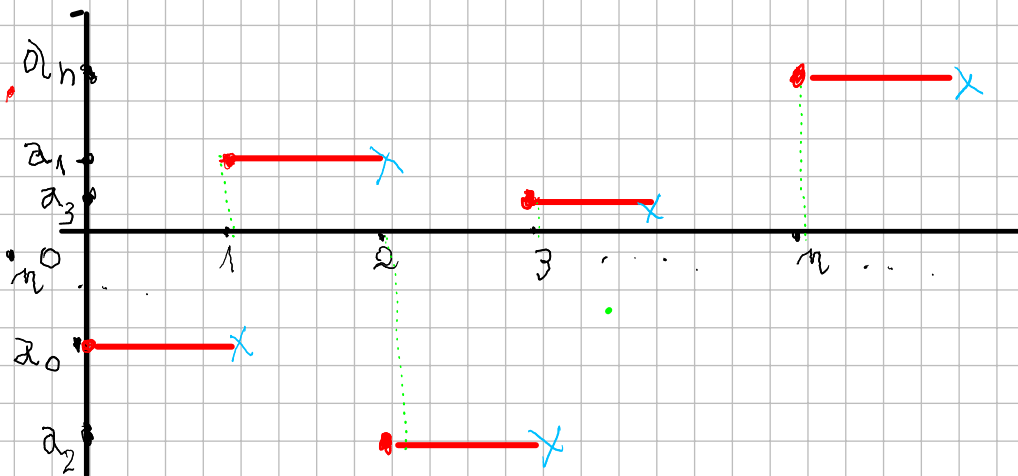
• $h(n) = \frac{n^3 - e^n}{2 + \sin n} + (\log n)^{2n+1} \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Considerando $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ il grafico di una successione $a_n, n \in \mathbb{N}$, con valori reali $a_n \in \mathbb{R}$, sarà del tipo



Ad esso si può associare il grafico di $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n \text{ se } \underline{n \leq x < n+1}$$



Notazione

- Usualmente il valore di una successione f in un $n \in \mathbb{N}$ si indica con f_n piuttosto che con $f(n)$
- per le successioni piuttosto che le lettere f, g, \dots usate per le funzioni si usano $a, b, c, \dots, x, y, \dots$
- Spesso poi si scrive per indicare una successione $a: S \rightarrow B$ $S = \mathbb{N}_n(m; +\infty)$ la notazione a_n , cioè la stessa notazione che si usa per indicare il suo generico valore su un generico elemento n appartenente ad S .

Funzione composta

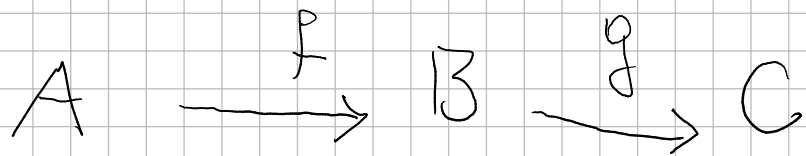
Definizione

Date due funzioni $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$

si dice funzione composta, indicata da $g \circ f: A \rightarrow C$ la funzione

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

composizione di
funzioni iniet. (surg.)
e iniet. (surg.)



Esempi

• $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = \arctan x$, $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $k(x) = x^2$

$$k \circ h(x) = k(h(x)) = (h(x))^2 = k(\arctan x) = (\arctan x)^2$$

$$h \circ k(x) = h(k(x)) = \arctan(k(x)) = \arctan(x^2)$$

• $g(x) = 2^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$

$$(g \circ a)_n = 2^{1/n}, \quad a \circ g \text{ non è definita.}$$

Sottosuccessione (o successione estratta)

Definizione

Se a è una successione $a: S \rightarrow B$, si dice che una successione $b: S' \rightarrow B$ è una sottosuccessione di a (o successione estratta) se è la composizione di a con una successione

$$k: S' \rightarrow S$$

strettamente crescente

(se $n > m$ sono in S' allora $k_n > k_m$). Cioè

$$b = a \circ k \quad \text{ovvero} \quad b_n = a_{k_n}$$

Esempio $b_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

è sottosuccessione di $a_n = (-1)^n$ con

$$k_n = 2n \quad \therefore \quad 1 = (-1)^{2n} = a_{2n}$$