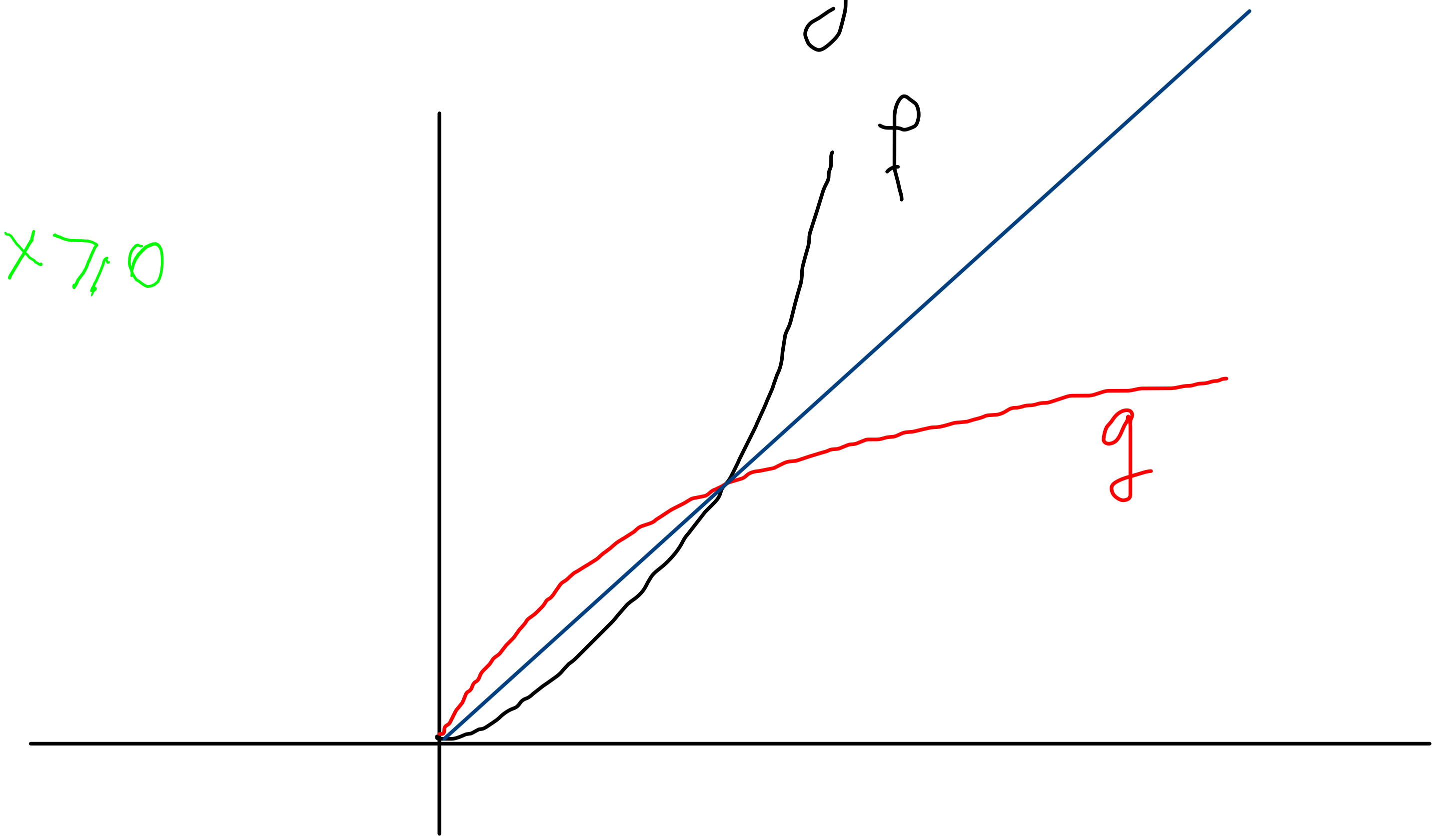
Oss: Se f è una funzione invertibile i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

$f(x) = x^2$ $x \geq 0$

$g(x) = \sqrt{x}$



Funzioni monotòne

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$

Se $\forall\, x_1, x_2$ risulta che

1) $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ si dice strettamente crescente

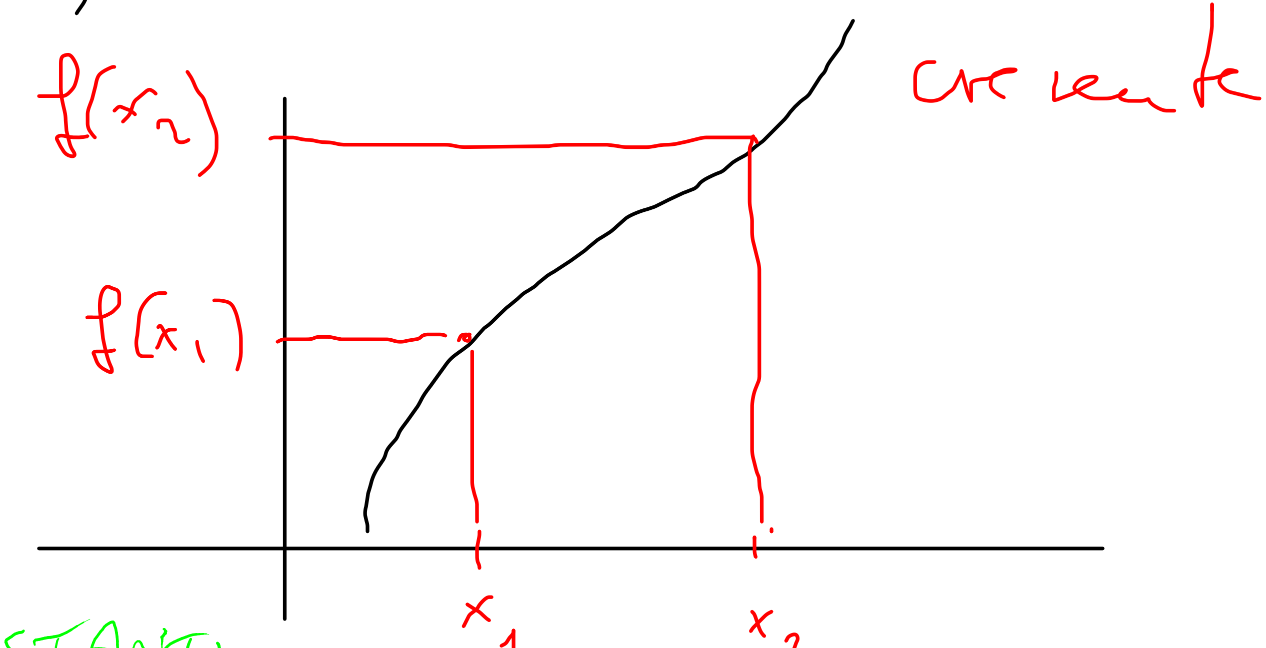
2) $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f$ si dice debolmente cresente

3) $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ si dice strettamente decresente

4) $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f$ si dice debolmente decrescente.

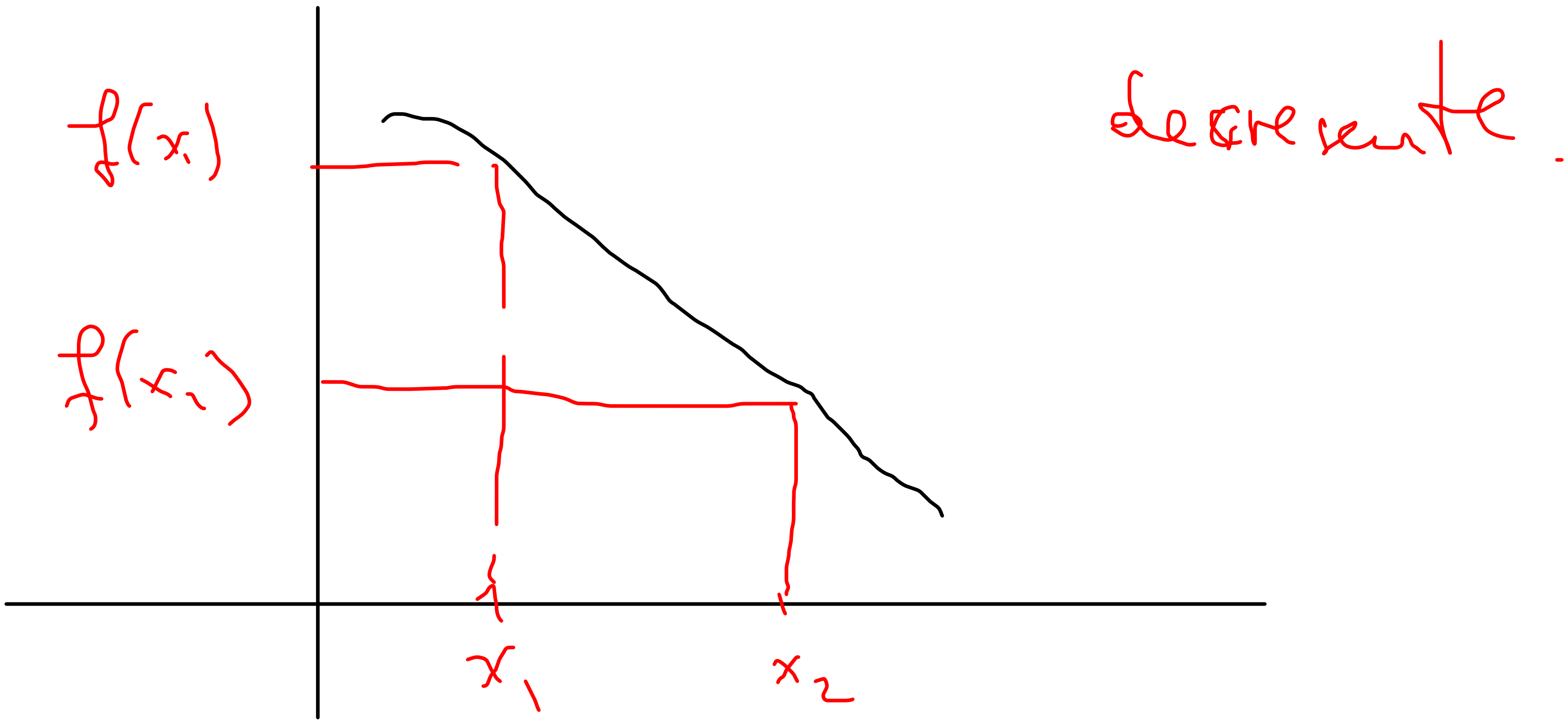
Se si verificano 1) o 3) f si dice strettamente monotona

Se valgono 2) o 4) f si dice debolmente monotona.



1) NON CRESCENTE NON VUOL DIRE DECRESCENTE

2) LE FUNZIONI COSTANTI SONO SIA DEB. CRESC. SIA DEB. DECR.



Se f è crescente allora mantiene l'ordinamento

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Se f è decrescente allora inverte l'ordinamento.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

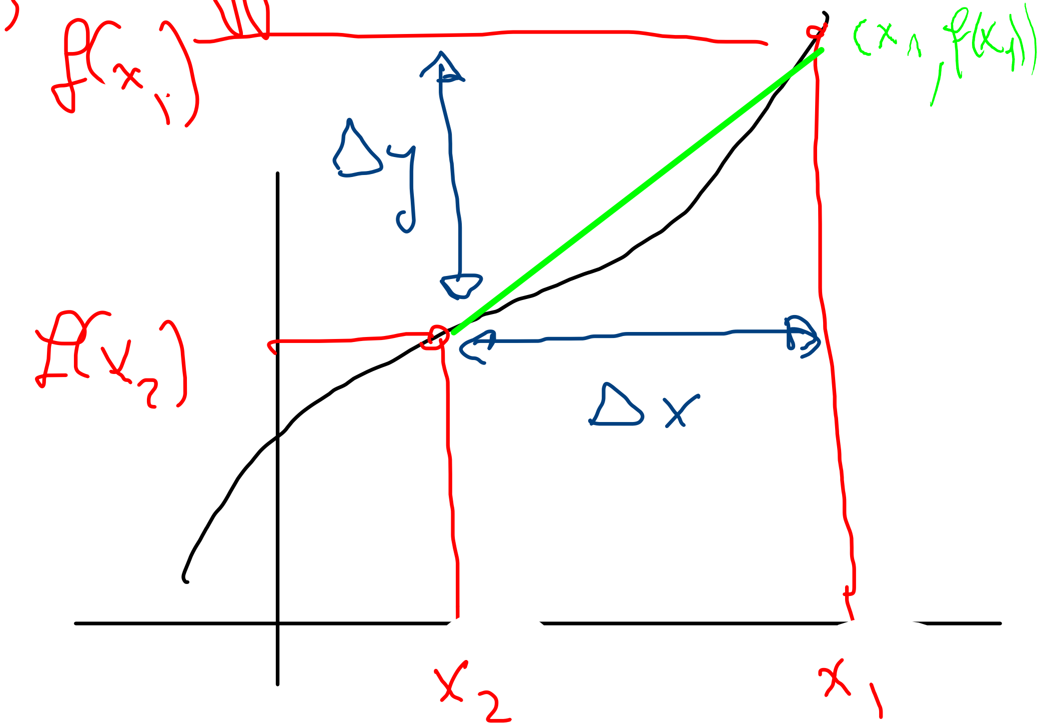
<u>Oss</u>: f è strettamente crescente se e solo se

concordi

in segno

$$\boxed{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}} > 0$$

rapporto incrementale



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$x_1 \neq x_2$$

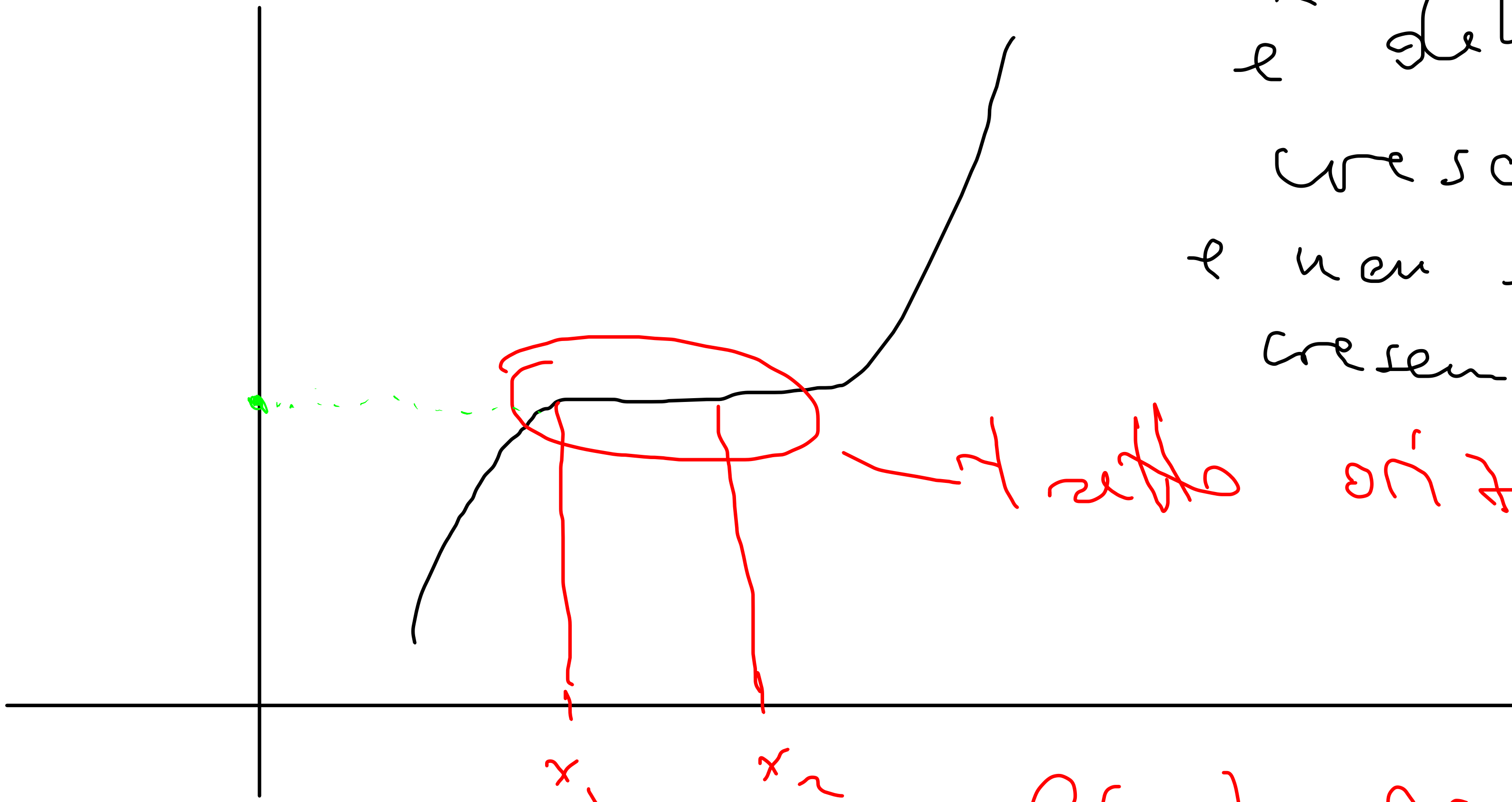
f è strettamente decrescente se

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

num e denominatore sono discordi in segno.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \quad \text{debolmente crescente}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \quad \text{debolm. decrescente.}$$



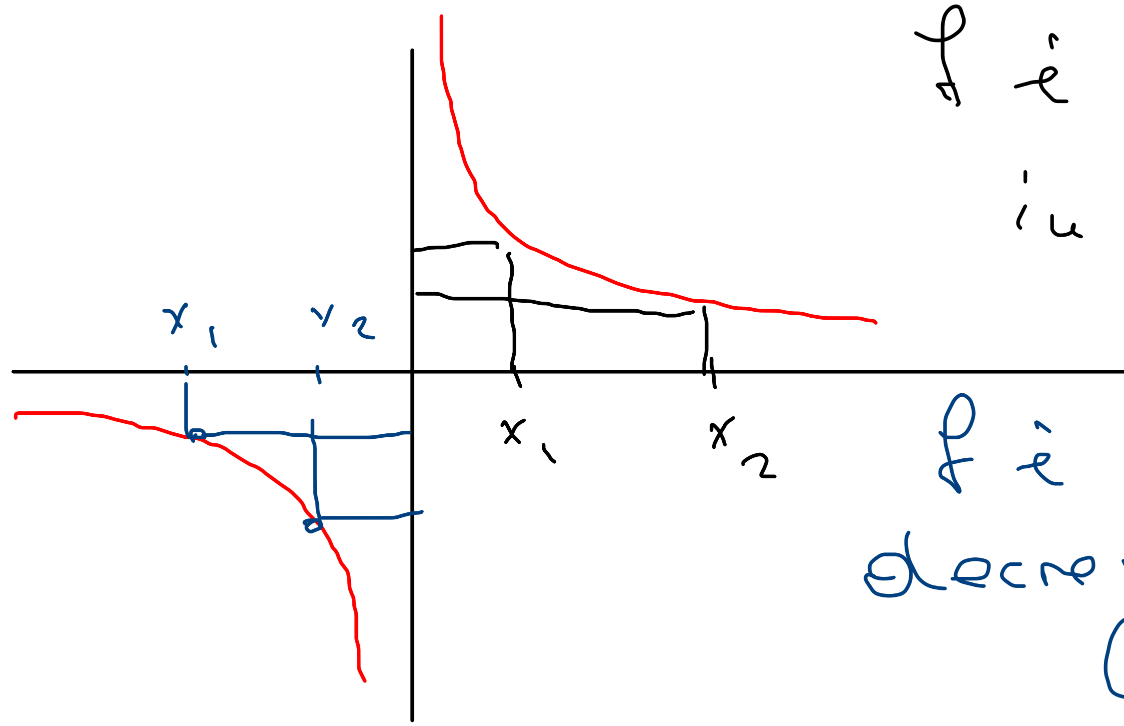
è debolmente crescente e non strettamente crescente.

tratto orizzontale.

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Oss. Se f è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente.

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f : \overbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{(-\infty;0)\cup(0;+\infty)} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

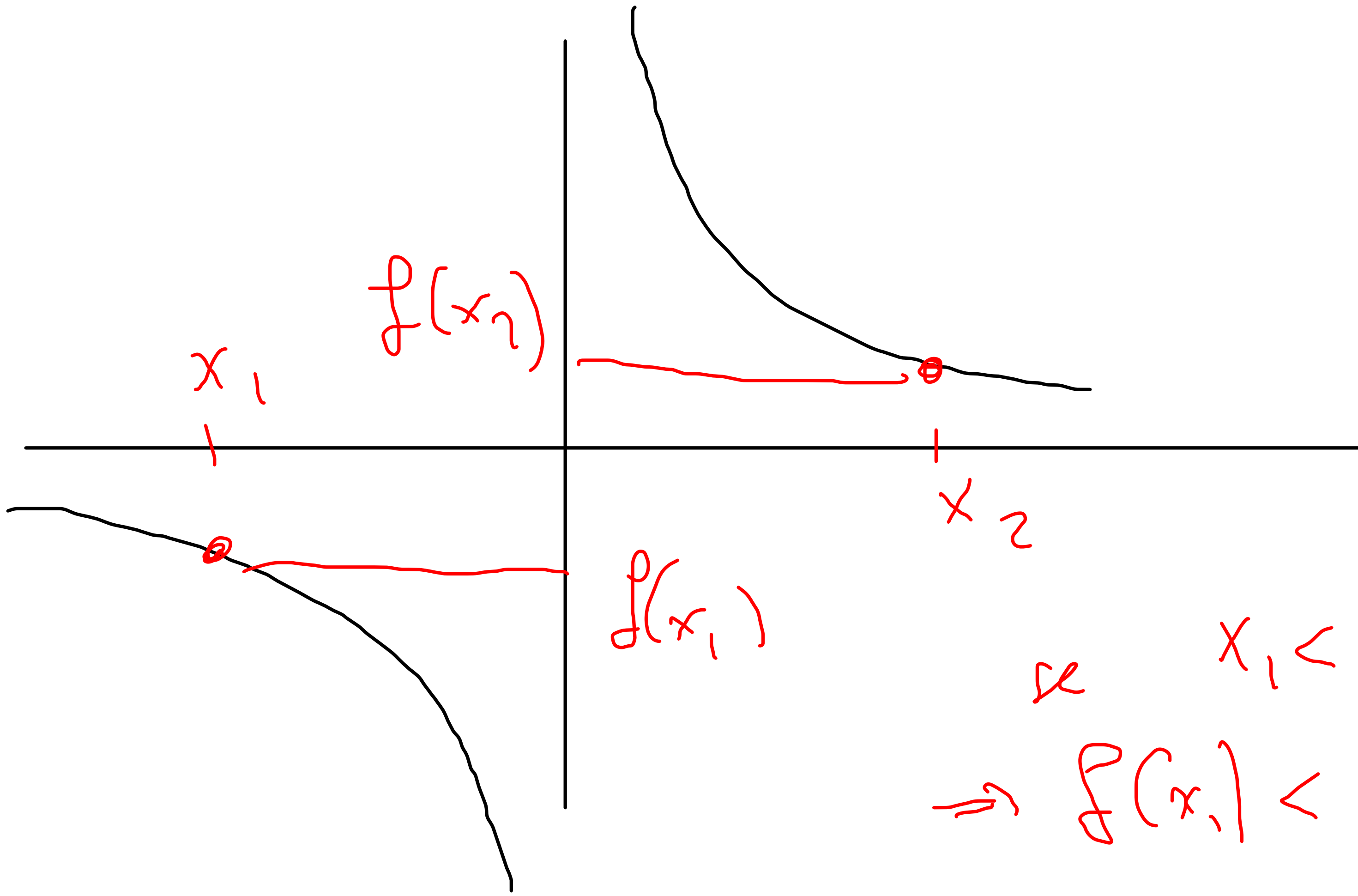


f è strett. decresc. in $(0,+\infty)$

f è strettam. decrescente in $(-\infty, 0)$

cioè se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



se $x_1 < 0 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f è decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$

ma f non è decrescente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Composizione di funzioni monotone

Prop: $A, B, C \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to B$, $g: B \to C$

Allora

1) Se f è cresente e g è cresente allora $g \circ f$ è cresente

2) Se f è cresente e g è decresente allora $g \circ f$ è decrescente. (e viceversa)

3) Se f è decresente e g è decresente allora $g \circ f$ è cresente.

Es: $h(x) = e^{x^3}$ si ottiene per composizione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

$$\frac{g(f(x_1)) - g(f(x_2))}{x_1 - x_2} = $$

$$= \frac{g(f(x_1)) - g(f(x_2))}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(t) = e^t$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x^3 \arrow[r, mapsto, "g"] & e^{x^3} \end{tikzcd}$$

$2 < e < 3$

costante Nepero

$$h(x) = e^{(x^3)} = e^{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

f è strett. crescente, g è strett. crescente

$\Rightarrow h$ è strett. crescente.

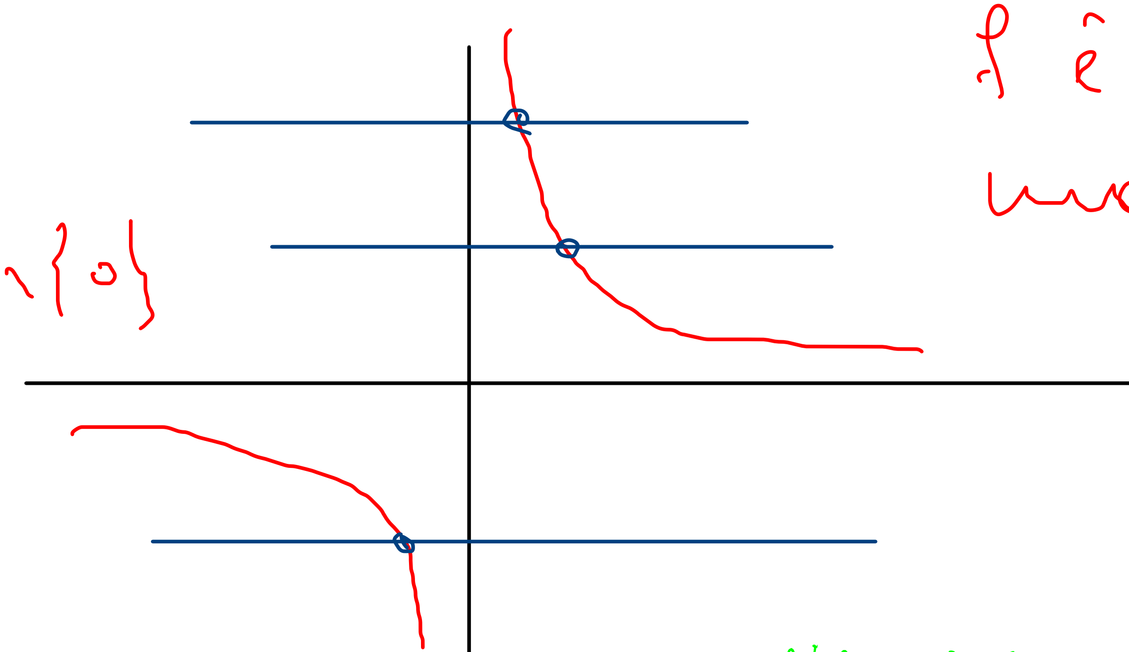
Oss: Se f è strettamente monotòna allora f è iniettiva.

Il viceversa è sempre vero?

Se f è iniettiva $\Rightarrow$ f è monotòna? NO

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$



f è iniettiva ma non è monotona.

CI VOGLIONO DUE IPOTESI: UNA SUL DOMINIO DI f E UNA SU f.

Def: L'insieme di definizione (o dominio naturale) di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso scrivere la funzione.

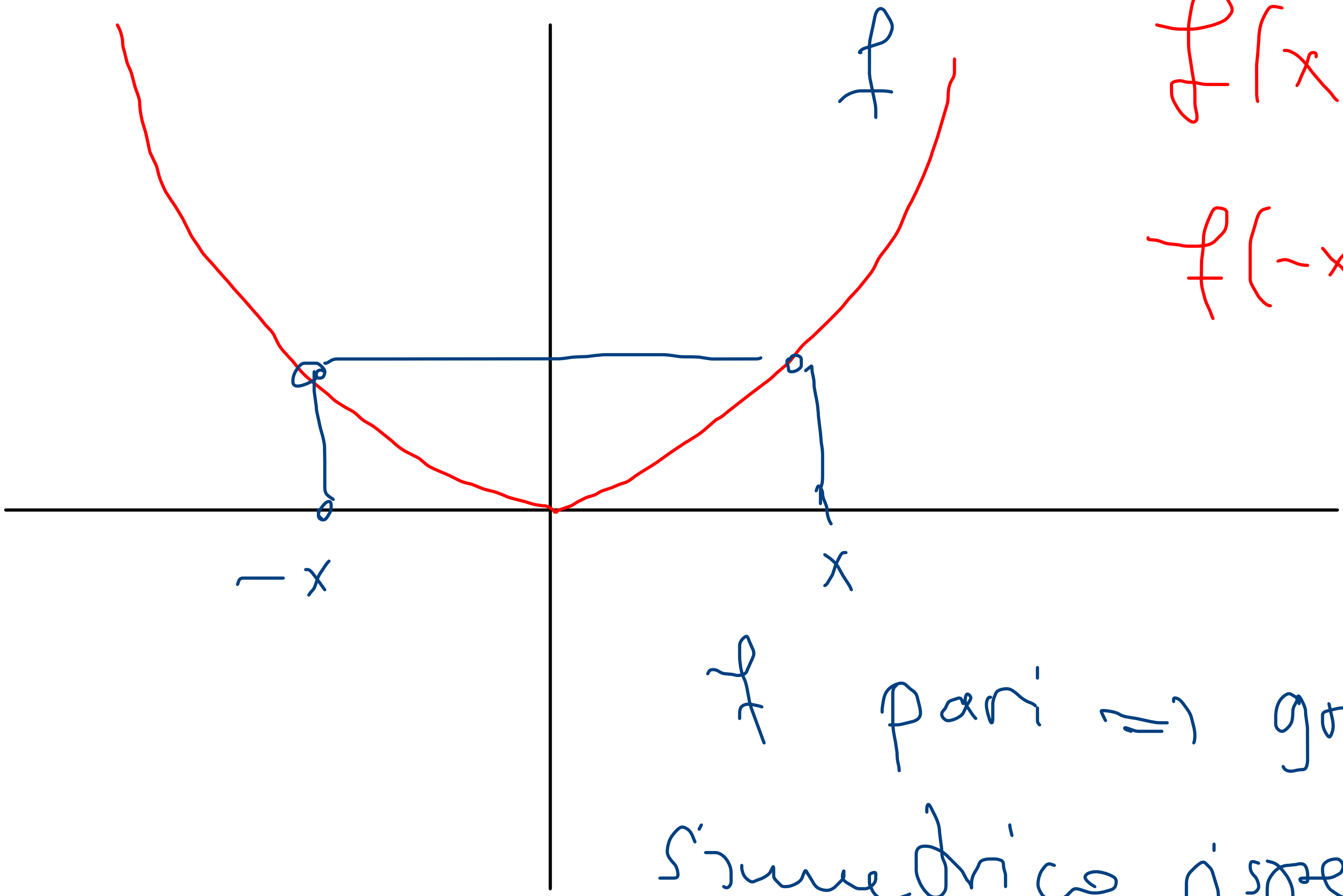
Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ dominio di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def: Se $f(x) = f(-x)$ $\forall x$ nel dominio di f $\Rightarrow$ f si dice pari

Se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x$ nel dominio di f $\Rightarrow$ f si dice dispari.

Oss: il dominio di f deve essere tale che se $x \in$ dominio $\Rightarrow$ $-x \in$ dominio.

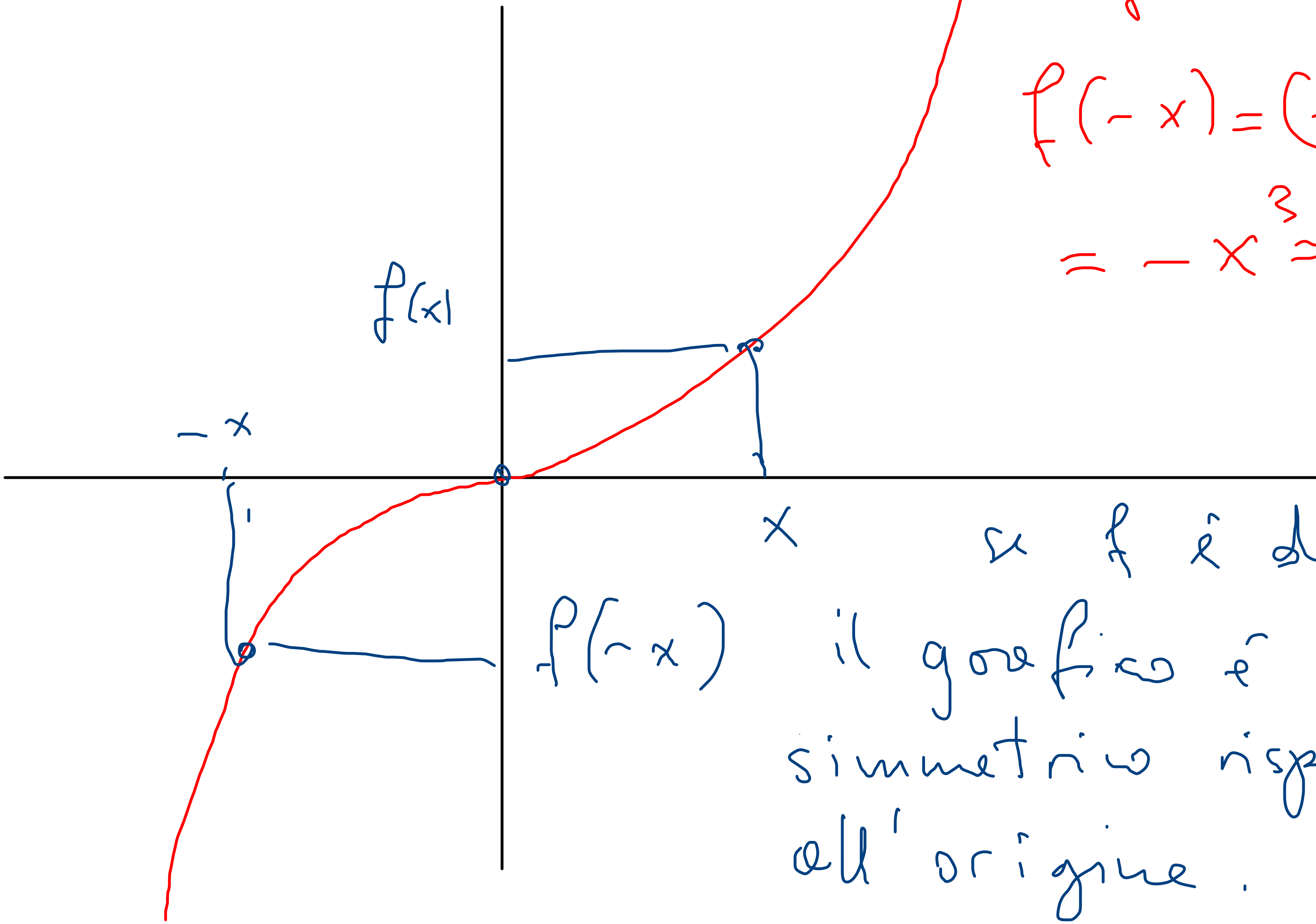
Cioè è simmetrico rispetto allo 0.



$f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$
$= f(x)$

f pari $\Rightarrow$ graph(f) simmetrico rispetto all'asse y.



$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 =$

$= -x^3 = -f(x)$

se f è dispari

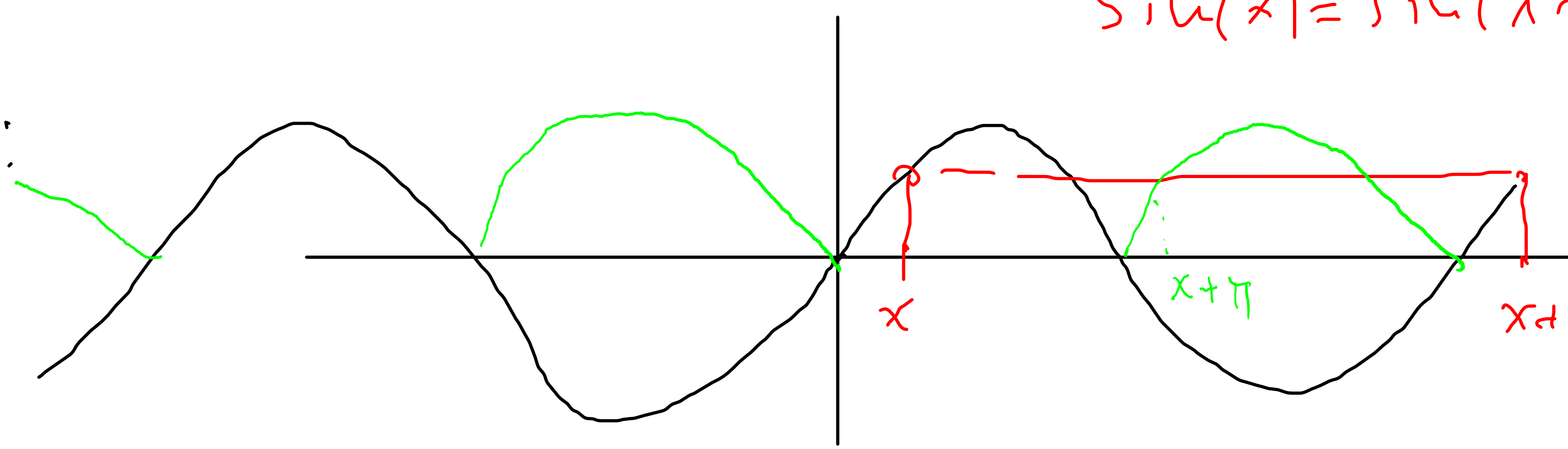
il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Def: f si dice periodica di periodo $P \in \mathbb{R}$ se $\forall x$ $f(x+P) = f(x)$.

Oss: il dominio di f deve essere tale che $x \in$ dominio $\Rightarrow$ $x+P \in$ dominio.

$\sin(x) = \sin(x+2\pi)$.

Es:



$|\sin x|$

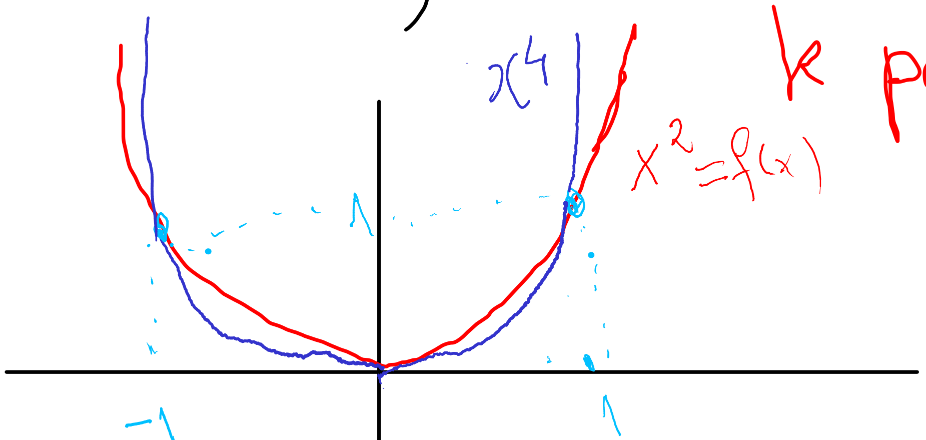
Funzioni elementari

$f(x) = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$ retta

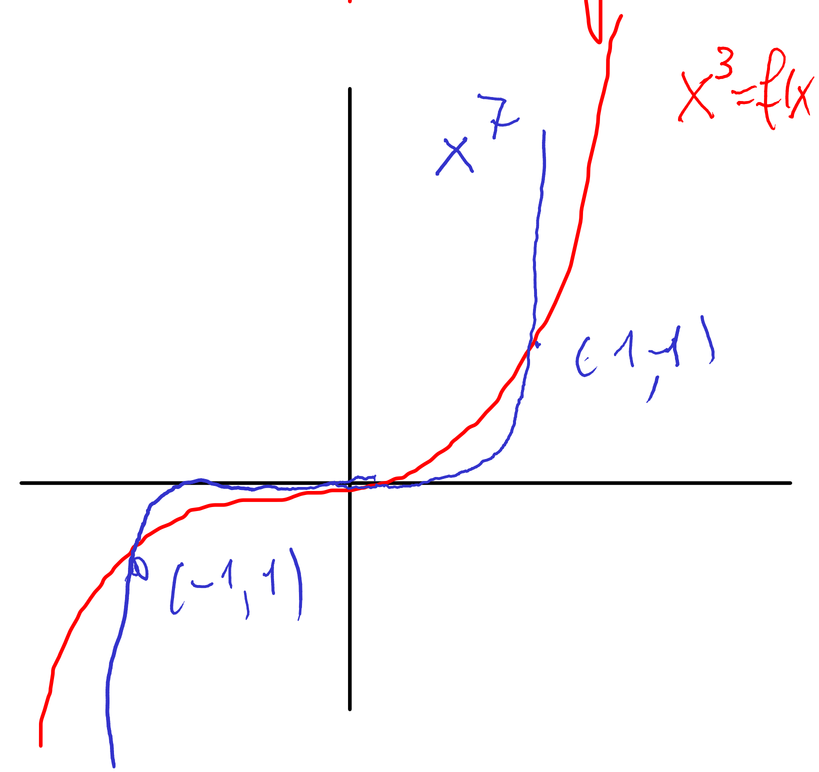
$a =$ coeff. angolare $\qquad b =$ termine noto

$f(x) = x^k \quad , k \in \mathbb{N}$

k pari



k dispari



$0 \le x \le 1 \implies x^4 = x^2 \cdot \underset{\le 1}{x^2} \le x^2$

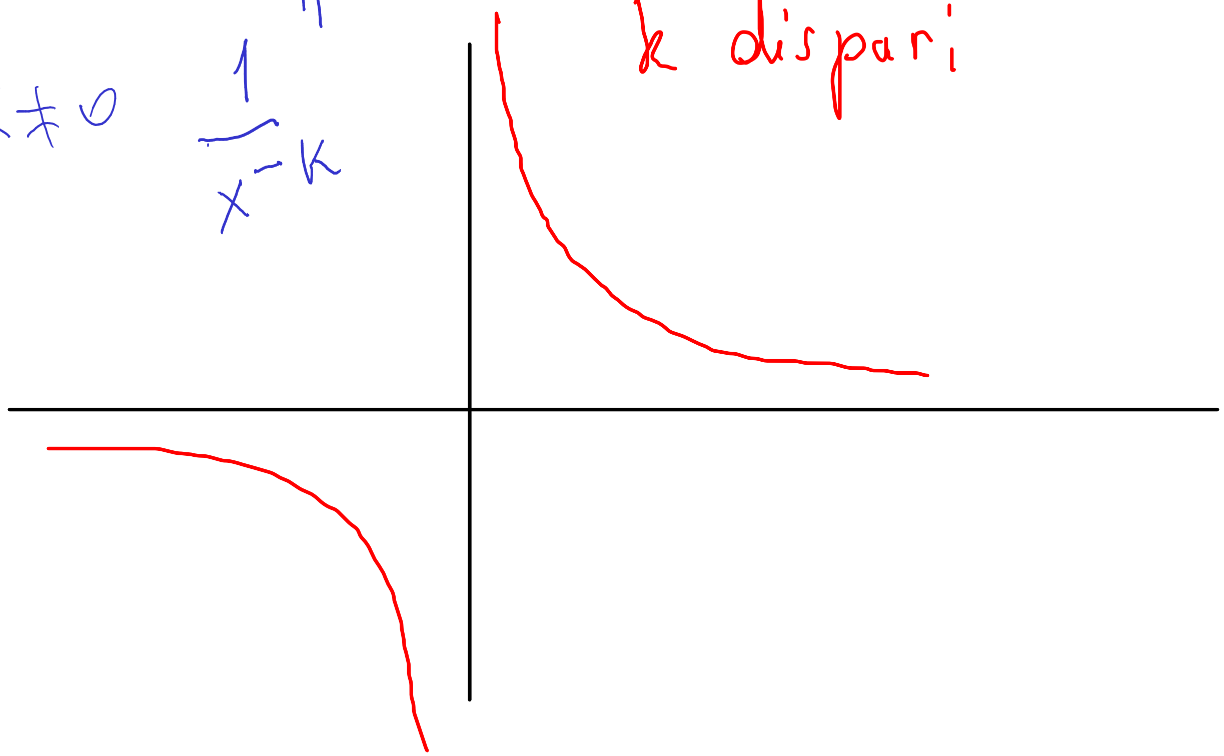
$x > 1 \implies x^4 = x^2 \cdot \underset{> 1}{x^2} > x^2$

$f(x) = x^k$ è una funzione pari se k è pari
dispari se k è dispari

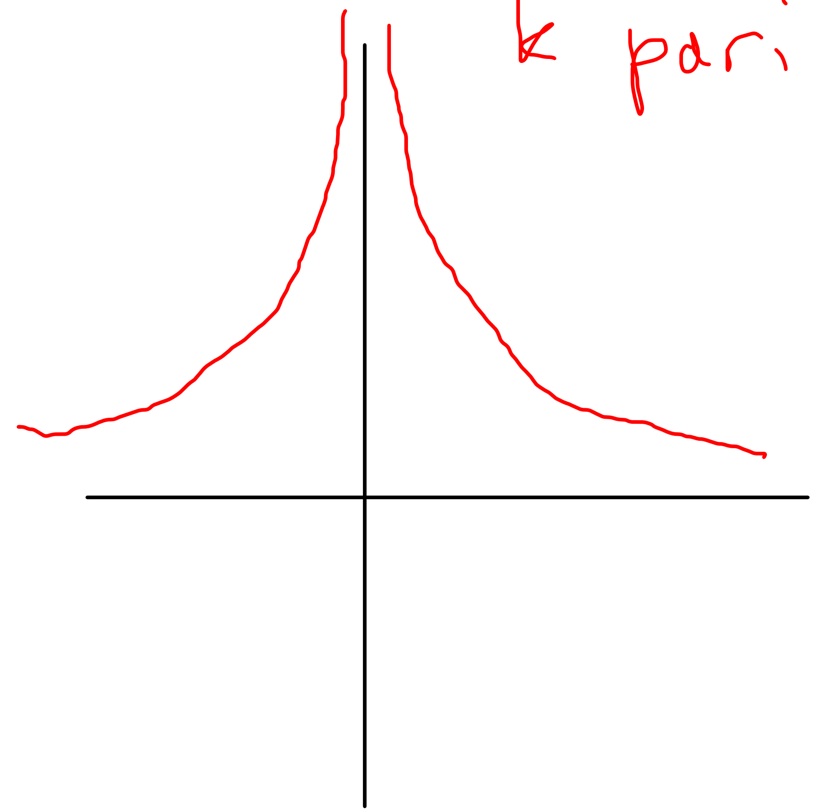
$f(x) = x^k$ $k \in \mathbb{Z}$ $k < 0$ $-k > 0$

$x \neq 0$ $= \frac{1}{x^{-k}}$

k dispari



k pari



$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ $\quad p, q \in \mathbb{N} \quad q \neq 0$

$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ $\quad$ p e q non entrambi pari

dominio naturale di f ?

$$x^{1/q} = \sqrt[q]{x} \quad \left(\text{inversa della funzione } g(x) = x^q\right)$$

se q è pari $\Rightarrow$ dominio è $x \geq 0$

se q è dispari $\Rightarrow$ dominio è $\mathbb{R}$.

perché se q è dispari $g(x) = x^q$
è invertibile su $\mathbb{R}$

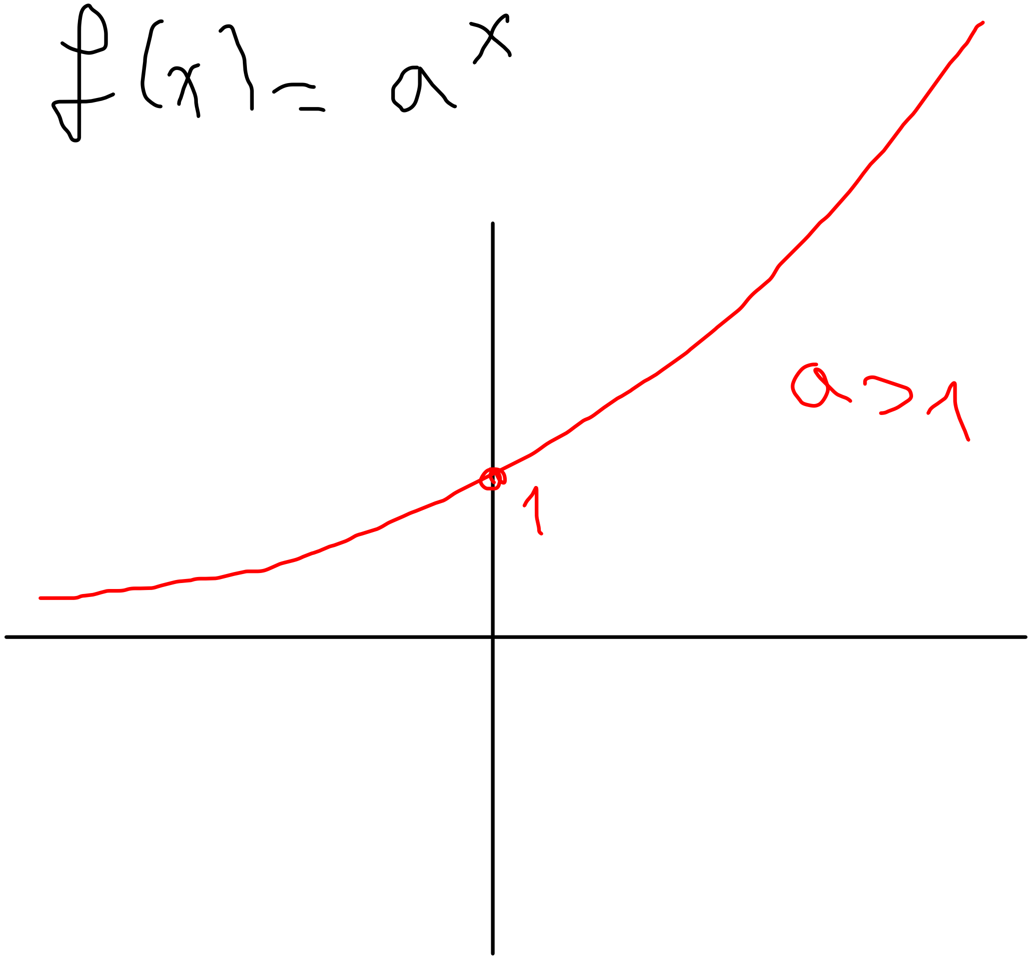
se q è pari è invertibile solo come
funzione $[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$.

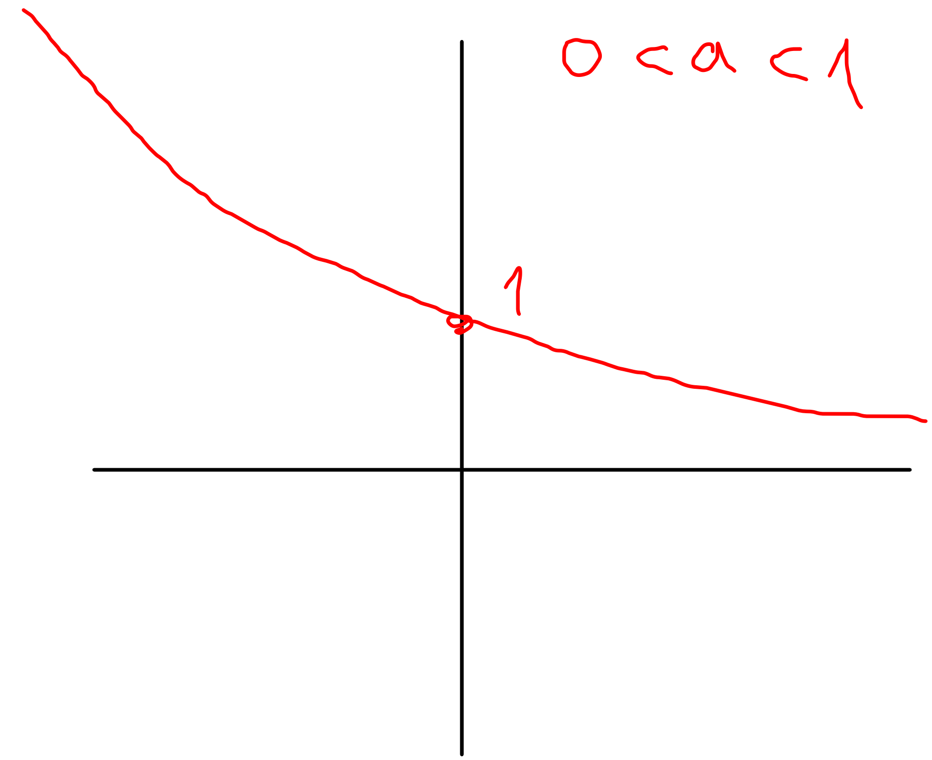
$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} \qquad \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Funzione esponenziale

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$f(x) = a^x$



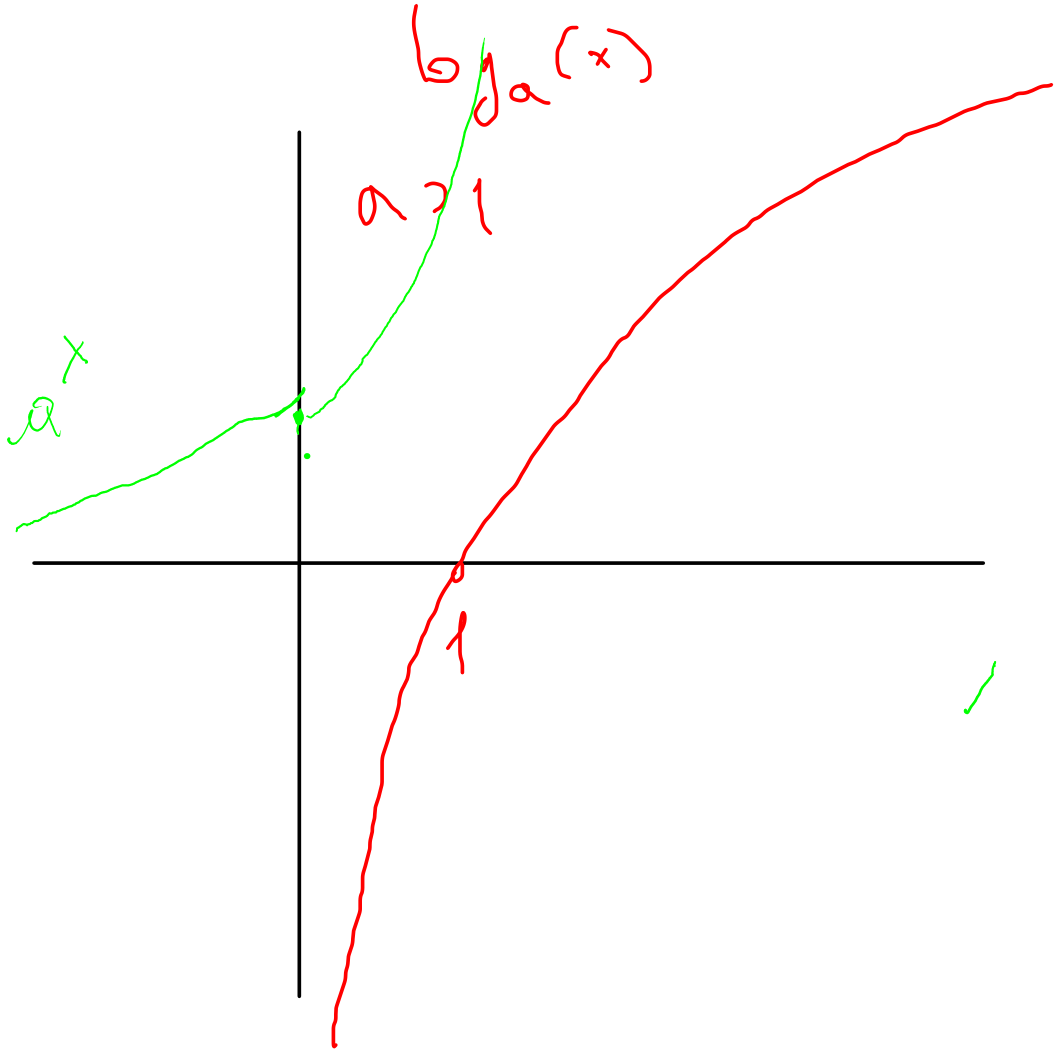


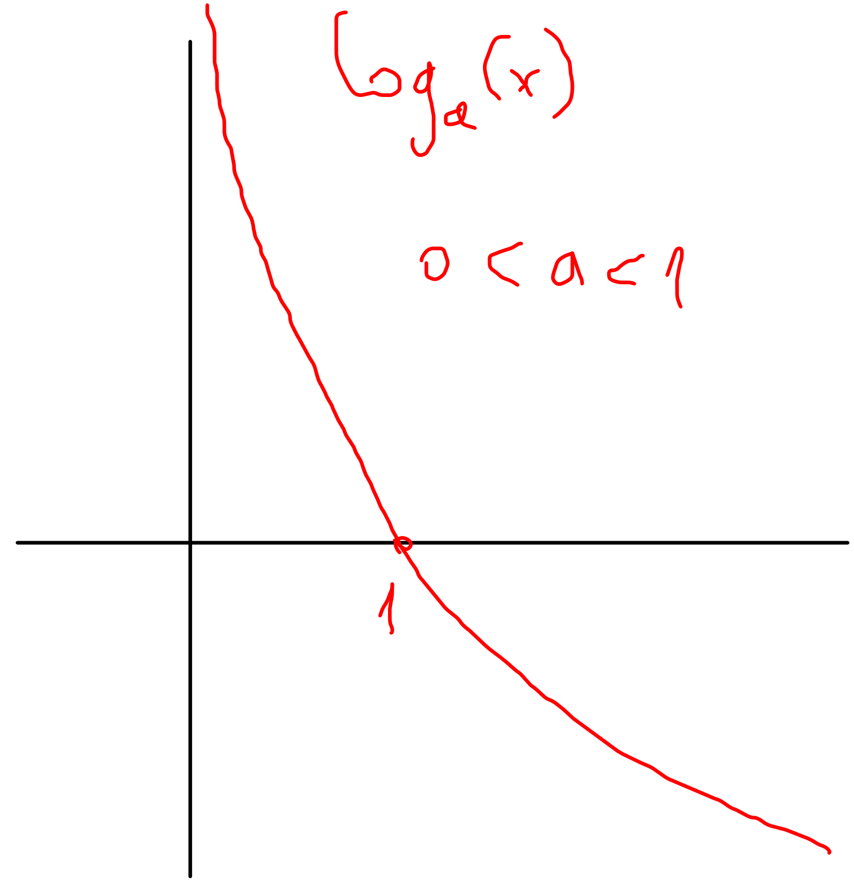
$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ è $\begin{cases} \text{strett. crescente se } a > 1 \\ \text{strett. decrescente se } 0 < a < 1. \end{cases}$

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \qquad f(x) = a^x$

è invertibile e la funzione inversa si chiama logaritmo in base a.





$$f(x) = \log_a(x)$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$a > 0, \; a \neq 1$$

$f(x) = e^x$ $\boxed{a = e}$ $e = 2{,}71\ldots$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ è invertibile

e la sua inversa si chiama logaritmo naturale.

$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$

Invece di scrivere $\log_e$ scriveremo $\log$.

Si usa anche il simbolo $\ln$ ma noi

non lo useremo. Per noi $\log = \log_e$.

Cambio di base nel logaritmo

$\boxed{\log_a x = y} \iff a^y = x$

facciamo il logaritmo naturale dell'identità

$\log(a^y) = \log x \iff y \log a = \log x$

ma $\boxed{y = \log_a x}$ $\Rightarrow \log_a x \cdot \log a = \log x$

$\Rightarrow \log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

$f(x) = x^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

cosa vuol dire $x^{\sqrt{2}}$ oppure x^{π} ?

Def: $\boxed{x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}}$ definita per $\boxed{x > 0}$

coerenza della notazione

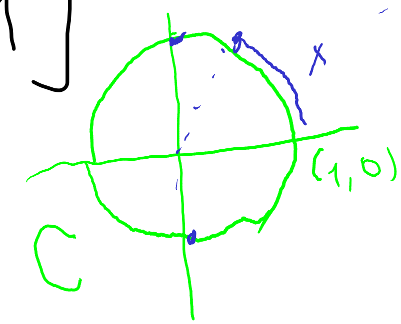
$$e^{\alpha \log x} = \left(e^{\log x}\right)^{\alpha} = x^{\alpha}$$

dominio naturale di $f(x) = x^{\alpha}$

è $(0, +\infty)$.

$$|\sin x|^{(\cos x)} = e^{\cos x \cdot \log|\sin x|} \quad \sin x \neq 0, \; x \neq k\pi$$

$f(x) = \sin x$ $\qquad f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



perché $\quad -1 \leq \sin x \leq 1$.

f è surgettiva se per ciascuno preso $[-1, 1]$.

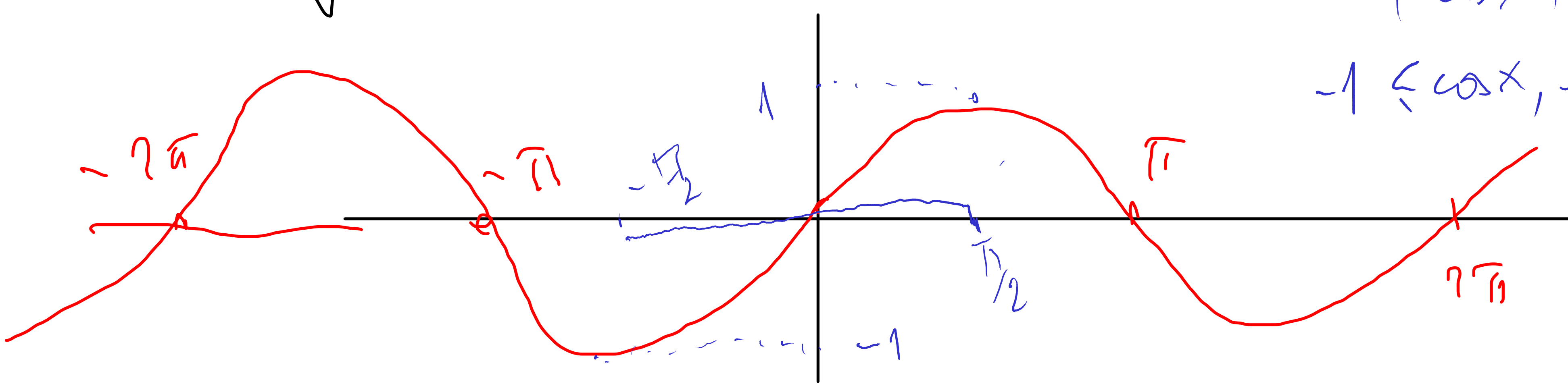
$C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

per def.

f è periodica di periodo 2π

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

$-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$

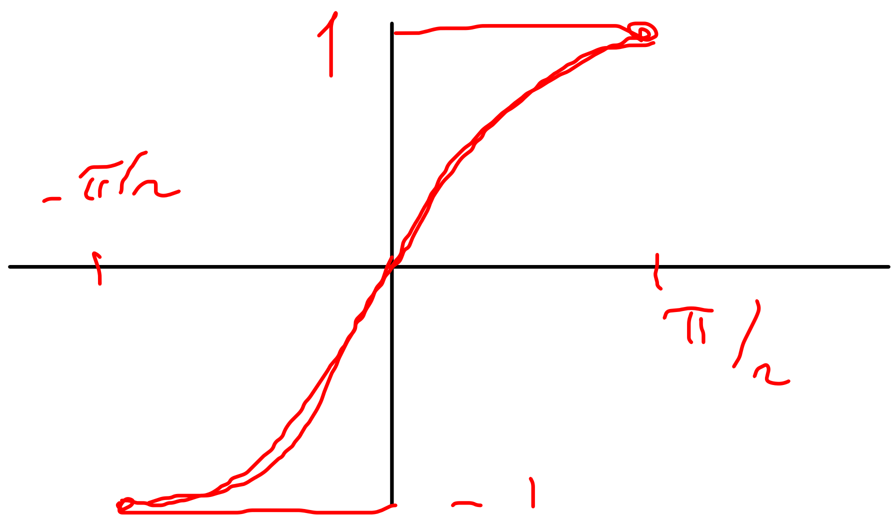


$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$

La posso invertire modificando dominio e codominio?

$f(x) = \sin x \qquad f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

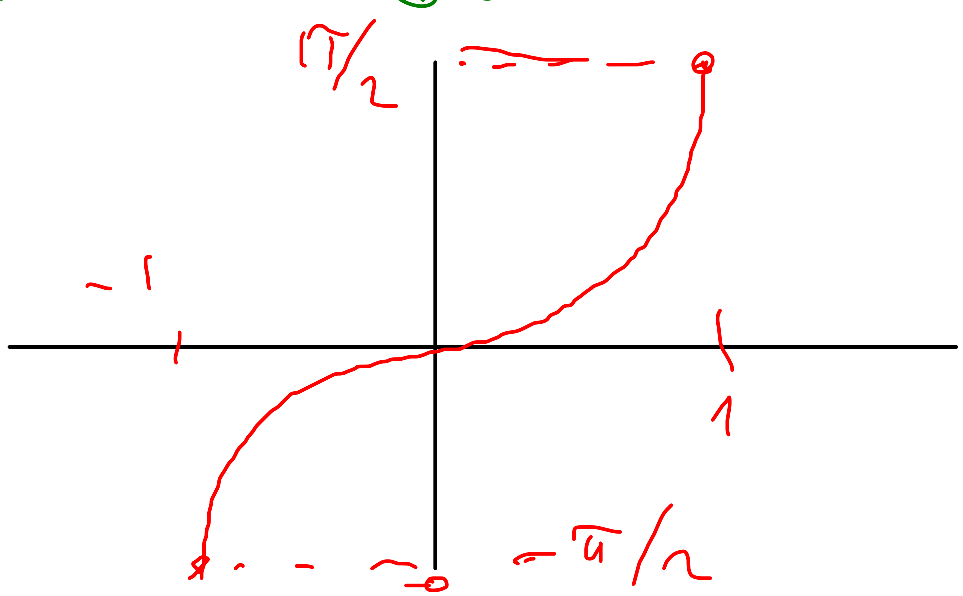
f è strettamente crescente e surgettiva



La sua inversa si chiama arcsin

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La funzione arcsin è l'inversa della funzione seno quando il dominio è $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e il codominio è $[-1,1]$.



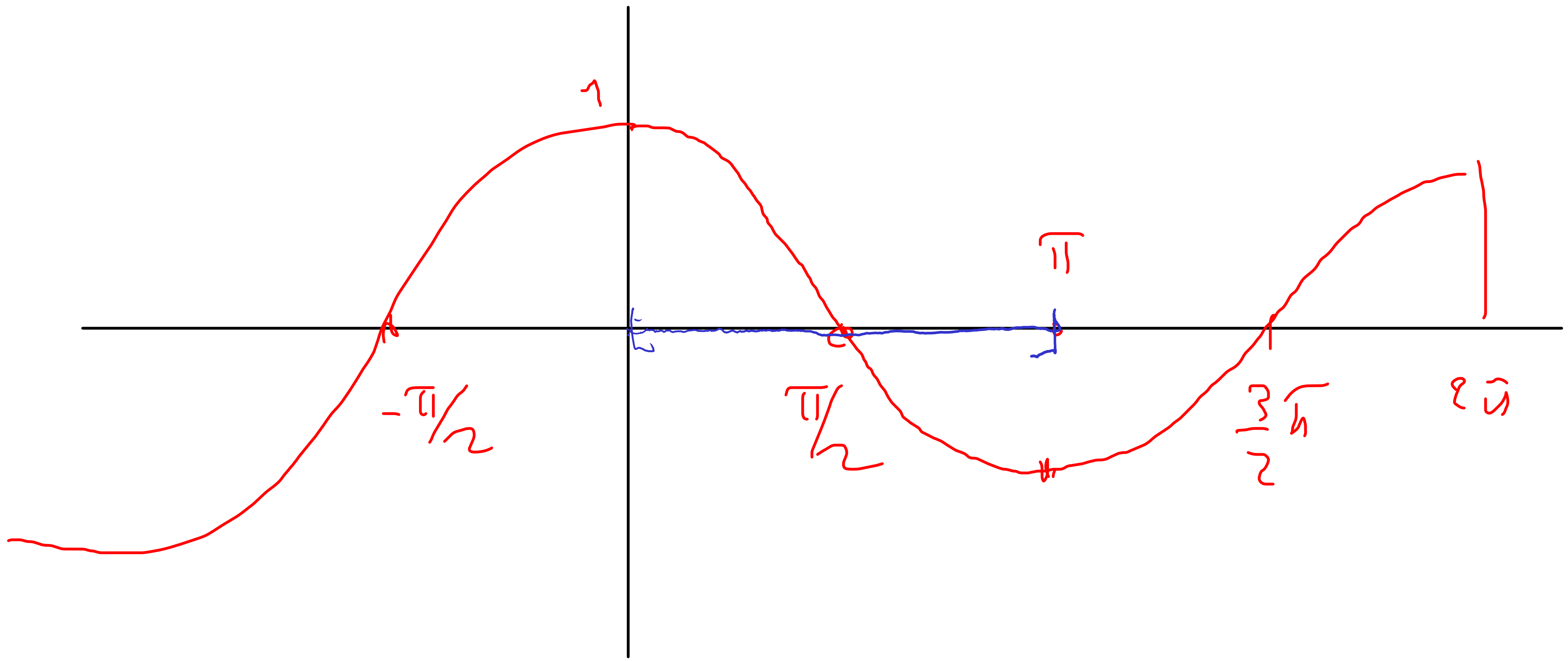
arcsin x

Esercizio

grafico di

1) grafico di $\sin(\arcsin x)$ $|x| \leq 1$, 2) $\arcsin(\sin x)$ $x \in \mathbb{R}$

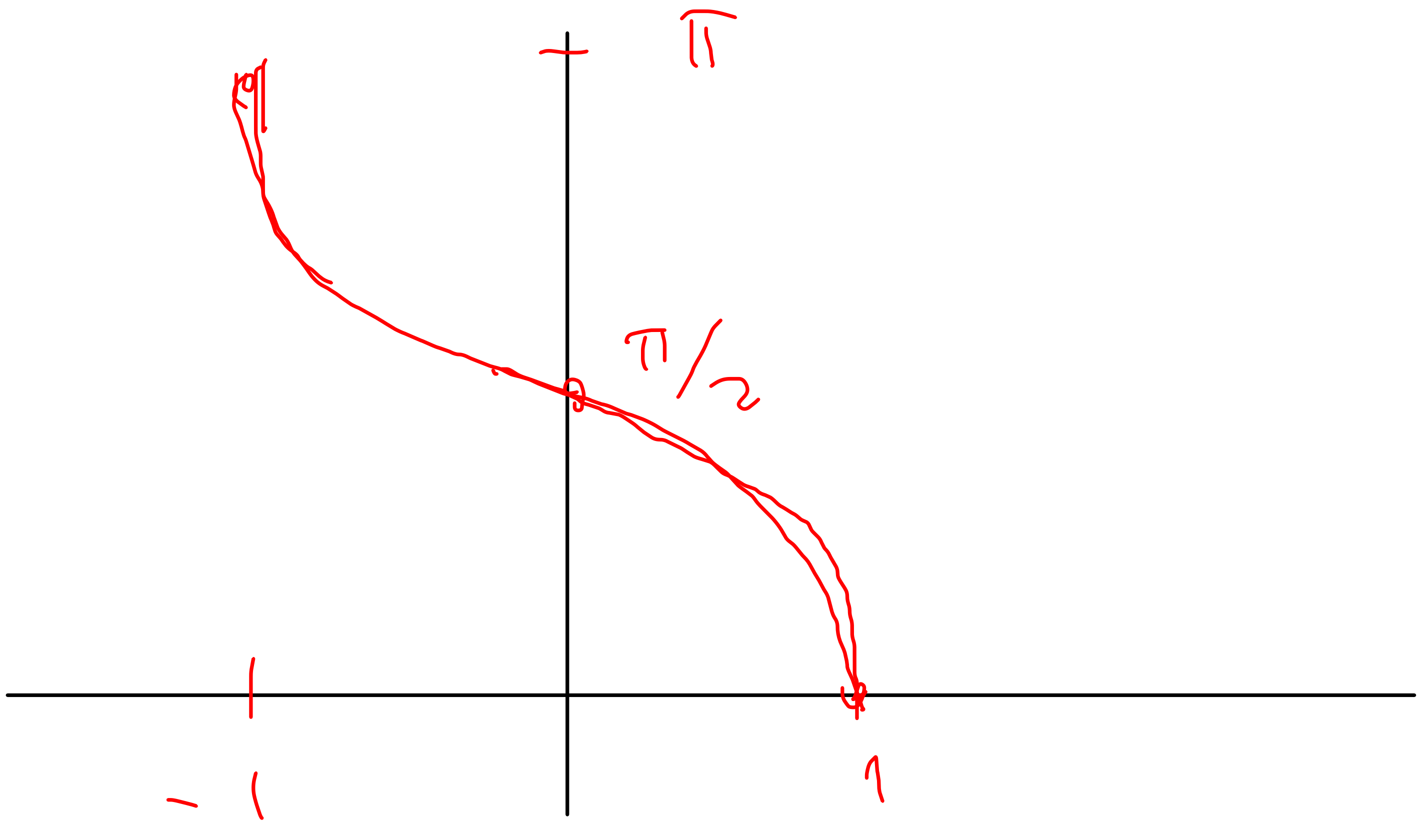
$f(x) = \cos x$ periodica di periodo 2π



$\cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ è invertibile

e la sua inversa si chiama arcocoseno

$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

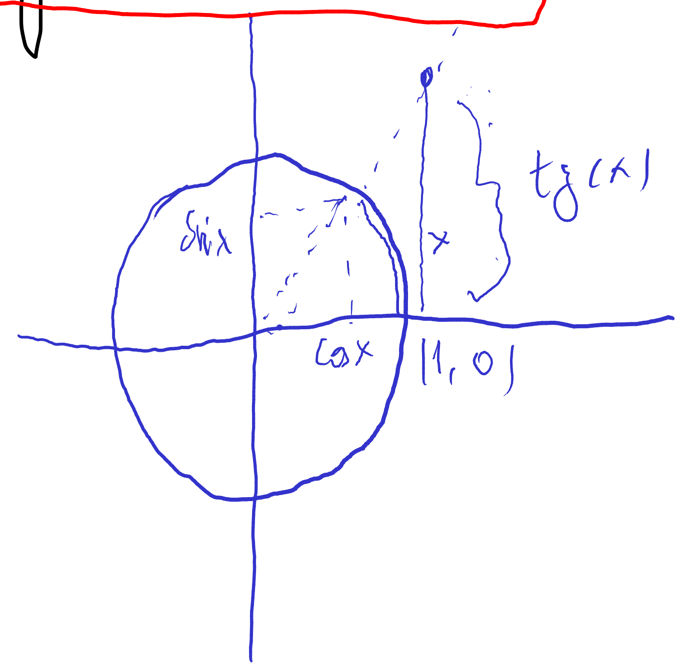


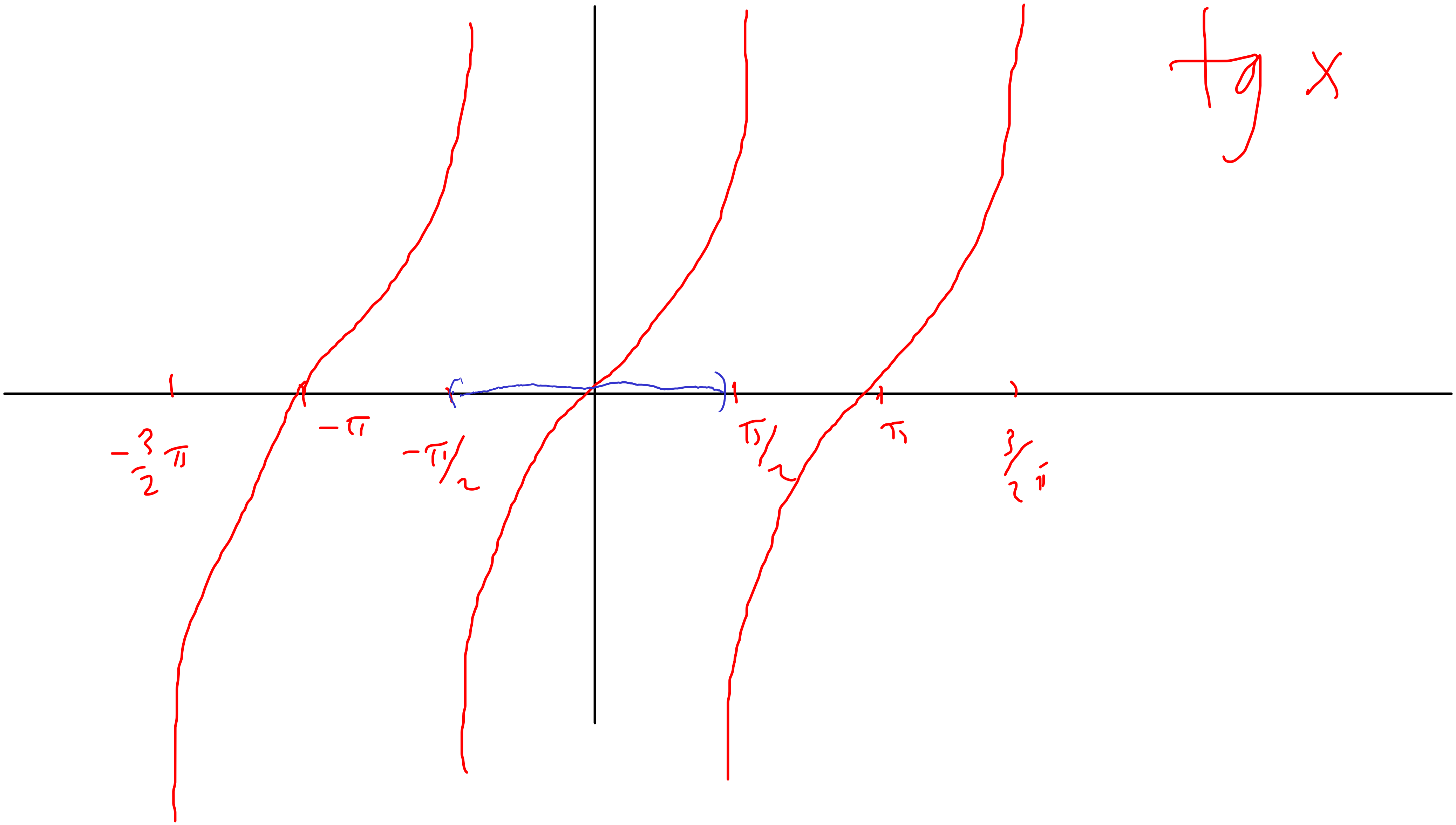
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ non è definita se $\cos x = 0$

dominio $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$

è fatto da infiniti intervalli disgiunti

è periodica di periodo π



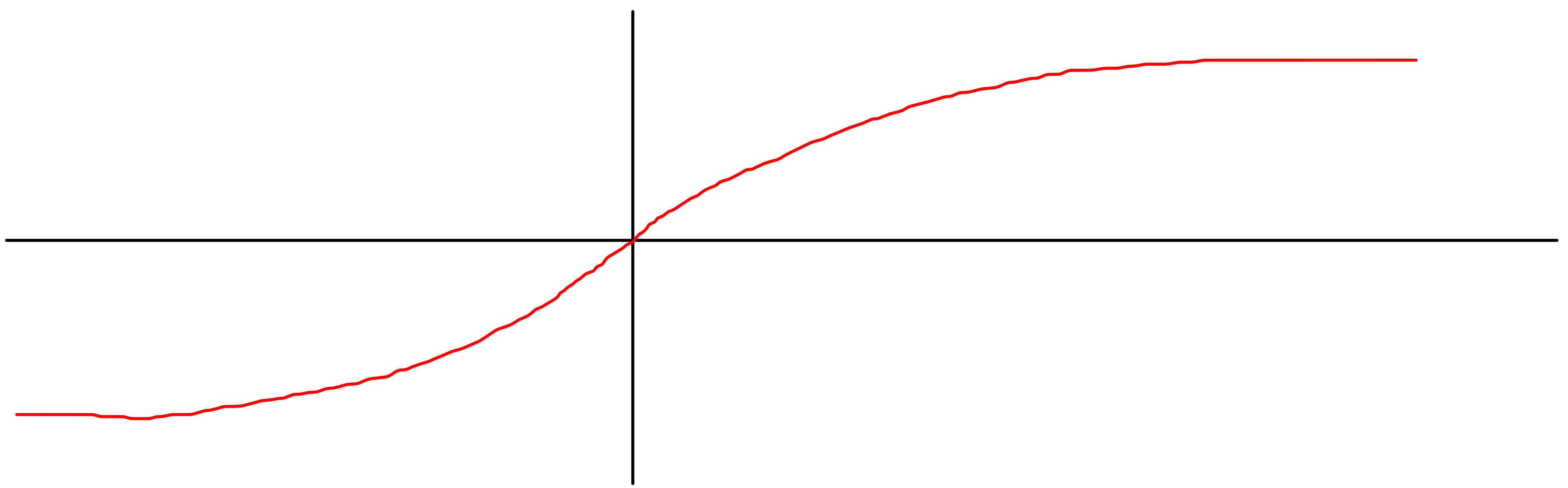


tg x

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile.

La sua inversa si chiama arcotangente

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

è strett. crescente.

da non confondere con la cotangente $\quad \cot g x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

$$\cot g x = \frac{1}{tg x}.$$

OKKIO non confondere $f^{-1}(x)$ con $\dfrac{1}{f(x)}$

Oss: $\sin x$ e $\operatorname{tg} x$ sono dispari

$\cos x$ è pari